Corrigé du partiel du 29 mars 2000
Statistique des processus
MST ISASH - Maîtrise MASS

Exercice 1.

Modélisation par une moyenne mobile.

Soient $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus stationnaire, et $x = (x_t, t \in \{1, \dots, 200\})$ une réalisation de ce processus entre les instants 1 et 200. Pour déterminer s'il est raisonnable de modéliser X par une moyenne mobile, on utilise les deux résultats suivants :

1. L'autocorrélation empirique $\hat{\rho}_X^{(200)}(t)$ calculée sur les 200 valeurs $X_1, \dots, X_{200}$, suit approximativement une loi gaussienne de moyenne l'autocorrélation (théorique) $\rho_X(t)$, et de variance $1/200$.
2. L'autocorrélation (théorique) d'un MA(q) est nulle à partir du rang $q+1$.

Ces deux arguments ont pour conséquence que si X est un MA(q), alors $\hat{\rho}_X^{(200)}$ appartient à l'intervalle $[-1{,}96/\sqrt{200}; 1{,}96/\sqrt{200}] \simeq [-0{,}14; 0{,}14]$ avec une probabilité de l'ordre de 95% pour tout $t > q$. L'autocorrélation estimée $\hat{\rho}_x^{(200)}$ est une réalisation de l'autocorrélation empirique ; à partir du rang $q+1$, sous l'hypothèse que X est un MA(q), elle doit donc être comprise entre $-0{,}14$ et $0{,}14$ environ 19 fois sur 20. Or on constate qu'aucun phénomène de ce type n'apparaît sur l'autocorrélaogramme à partir de quelque rang que ce soit.
Une modélisation de type MA(q) n'est donc pas opportune.

Modélisation par un processus autorégressif.

On raisonne de façon tout à fait symétrique pour déterminer si une modélisation de type AR(p) est envisageable. On se sert des résultats suivants :

1. L'autocorrélation partiel empirique $\hat{r}_X^{(200)}(t)$ calculée sur les 200 valeurs $X_1, \dots, X_200$, suit approximativement une loi gaussienne de moyenne l'autocorrélation partielle (théorique) $r_X(t)$, et de variance $1/200$.
2. L'autocorrélation partielle (théorique) d'un AR(p) est nulle à partir du rang $p+1$.

Cela a pour conséquence que si X est un AR(p), alors $\hat{r}_X^{(200)}$ appartient à l'intervalle $[-1{,}96/\sqrt{200}; 1{,}96/\sqrt{200}] \simeq [-0{,}14; 0{,}14]$ avec une probabilité de l'ordre de 95% pour tout $t > p$. L'autocorrélation partielle estimée $\hat{r}_x^{(200)}$ est une réalisation de l'autocorrélation partielle empirique ; à partir du rang $p+1$, sous l'hypothèse que X est un AR(p), elle doit donc être comprise entre $-0{,}14$ et $0{,}14$ environ 19 fois sur 20. Or on constate sur l'autocorrélogramme que c'est effectivement le cas à partir de $t = 5$, et même, à une exception près – ce qui est acceptable sur 39 valeurs et peut correspondre aux 5% qui n'appartiennent pas à l'intervalle $[-0{,}14; 0{,}14]$ –, à partir de $t = 2$.
On peut donc proposer de modéliser X par un AR(4), voire par un AR(1).

Les équations qui permettent de déterminer les coefficients d'un modèle AR(p) sont les équations de Yule-Walker.

Hypothèse AR(1) : $X_t = \varepsilon_t + \beta_1 X_{t-1}$. Alors les équations de Yule-Walker se réduisent à

$$(1)(\beta_1) = (\rho_X(1))$$

D'où l'estimation de β_1 par $\hat{\rho}_X^{(200)}(1) = 0{,}966$.

Hypothèse AR(4) : $X_t = \varepsilon_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \beta_3 X_{t-3} + \beta_4 X_{t-4}$. Alors les éqution de Yule-Walker deviennent

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_X(1) & \rho_X(2) & \rho_X(3) \\ \rho_X(1) & 1 & \rho_X(1) & \rho_X(2) \\ \rho_X(2) & \rho_X(1) & 1 & \rho_X(1) \\ \rho_X(3) & \rho_X(2) & \rho_X(1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_X(1) \\ \rho_X(2) \\ \rho_X(3) \\ \rho_X(4) \end{pmatrix}$$

Pour estimer les coefficients $\beta_1, \ldots, \beta_4$, on remplace l'autocorrélation par l'autocorrélation estimée. D'où

$$\begin{pmatrix} 1 & 0{,}966 & 0{,}925 & 0{,}878 \\ 0{,}966 & 1 & 0{,}966 & 0{,}925 \\ 0{,}925 & 0{,}966 & 1 & 0{,}966 \\ 0{,}878 & \rho_X(2) & 0{,}966 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat\beta_1 \\ \hat\beta_2 \\ \hat\beta_3 \\ \hat\beta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}966 \\ 0{,}925 \\ 0{,}878 \\ 0{,}816 \end{pmatrix}$$

Remarque : ce système a pour solution $(\hat\beta_1; \hat\beta_2; \hat\beta_3; \hat\beta_4) = (1{,}047; -0{,}014; 0{,}154; -0{,}239)$.

Exercice 2.

1) Montrons que ϕ annule les composantes saisonnières.
Méthode 1. On remarque que la transformée en z de ϕ peut se décomposer en

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \frac{1}{9}(8 + z + 3z^2 - 5z^3 + 2z^4) \\ &\frac{1}{3}(\frac{1}{z} + 1 + z) \times z \times \frac{1}{3}(8 - 7z + 2z^2) \end{aligned}$$

Autrement dit, ϕ s'écrit comme produit de composition des filtres $M_1 = \frac{1}{3}(F + I + B)$, B et $\frac{1}{3}(8I - 7B + 2B^2)$. Or M_1 annule les composantes saisonnières de période 3. Donc ϕ aussi.

Méthode 2. Soit x^σ une composante saisonnière de période 3 ; x^σ vérifie donc les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{Z} \quad & x_t^\sigma + x_{t-1}^\sigma + x_{t-2}^\sigma = 0 \\ & x_t^\sigma = x_{t-3}^\sigma \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \phi(x^\sigma)_t &= \frac{1}{9}(8x_t^\sigma + x_{t-1}^\sigma + 3x_{t-2}^\sigma - 5x_{t-3}^\sigma + 2x_{t-4}^\sigma) \\ &= \frac{1}{9}\big((8x_t^\sigma - 5x_{t-3}^\sigma) + (x_{t-1}^\sigma + 2x_{t-4}^\sigma) + 3x_{t-2}^\sigma\big) \\ &= \frac{1}{9}(3x_t^\sigma + 3x_{t-1}^\sigma + 3x_{t-2}^\sigma) \\ &= 0 \end{aligned}$$

2) Montrons que ϕ conserve les tendances polynômiales de degré inférieur ou égal à 2.

Méthode 1. Il suffit de vérifier que $(1-z)^3$ divise $1-\phi(z)$, ce qui revient à déterminer a et b tels que

$$1-\phi(z) = (1-z)^3(a+bz)$$

En développant, et en identifiant les coefficients, on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} \frac{8}{9} = a \\ -\frac{1}{9} = -3a+b \\ -\frac{3}{9} = 3a-3b \\ \frac{5}{9} = -a+3b \\ -\frac{2}{9} = -b \end{cases}$$

Ce système admet une solution $a = 1/9$ et $b = 2/9$. Ce qui conclut la preuve.

Méthode 2. Soit $x_t = \alpha + \beta t + \gamma t^2$ une tendance polynômiale quelconque de degré inférieur à 2. Montrons que $\phi(x)_t = x_t$:

$$\begin{aligned} \phi(x)_t &= \frac{1}{9}(8x_t + x_{t-1} + 3x_{t-2} - 5x_{t-3} + 2x_{t-4}) \\ &= \frac{1}{9}\big(8(\alpha+\beta t+\gamma t^2) + (\alpha+\beta(t-1)+\gamma(t-1)^2) + 3(\alpha+\beta(t-2)+\gamma(t-2)^2) \\ &\quad - 5(\alpha+\beta(t-3)+\gamma(t-3)^2) + 2(\alpha+\beta(t-4)+\gamma(t-4)^2)\big) \\ &= \frac{1}{9}\big(\alpha(8+1+3-5+2) + \beta(-1-6+15-8) + \gamma(1+12-45+32) \\ &\quad + t(\beta(8+1+3-5+2) + \gamma(-2-12+30-16)) \\ &\quad + t^2(\gamma(8+1+3-5+2))\big) \\ &= \frac{1}{9}(9\alpha + 9\beta t + 9\gamma t^2) = x_t \end{aligned}$$

3) Le filtre ϕ n'est pas inversible puisqu'il n'est pas injectif : toutes les composantes saisonnières de prériode 3 ont même image, qui est la suite nulle. En terme d'algèbre linéaire, vela signifie que le noyau de l'opérateur linéaire ϕ n'est pas réduit à $\{0\}$.
Autre preuve : j et j^2 racines de $1+z+z^2$ sont racines de $\phi(z)$; or elles sont de modules 1, et l'on sait qu'un filtre est inversible si et seulement si sa transformée en z n'a pas de racine de module 1.

Exercice 3.

1) Il s'agit d'un modèle AR(2) (ou ARMA(2,0)), de la forme $\phi(B)(X) = \varepsilon$ avec $\phi(z) = 1 + 0{,}4z - 0{,}12z^2$.

2) ε est le bruit blanc d'innovation associé à X si le modèle ARMA qui détermine X en fonction de lui-même est causal et inversible. Le modèle est inversible s'il est possible d'écrire ε_t sous la forme

$$\varepsilon_t = \sum_{u \geq 0} \xi_u X_{t-u}$$

autrement comme fonction du passé de X jusqu'à l'instant t ; or c'est bien le cas par définition même du processus autorégressif, avec $\xi_0 = 1$, $\xi_1 = 0{,}4$, $\xi_2 = -0{,}12$ et $\xi_u = 0$ pour tout $u > 2$.
Le modèle est causal s'il est possible d'écrire X_t comme fonction du passé de ε jusqu'à l'instant t, autrement dit sous la forme

$$X_t = \sum_{u \geq 0} \psi_u \varepsilon_{t-u}$$

C'est le cas si et seulement si les racines de $\phi(z)$ sont de module strictement plus grand que 1. Or $\phi(z) = (1 - 0{,}2z)(1 + 0{,}6z)$, et ses racines sont donc 5 et $-5/3$. Le modèle est donc bien causal.
Conclusion : ε est bien le bruit blanc d'innovation associé à X.

3) Soient $s < t$ quelconques. En reprenant les notations du 2) :

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(\varepsilon_t, X_s) &= \operatorname{cov}\big(\varepsilon_t, \sum_{u \geq 0} \psi_u \varepsilon_{s-u}\big) \\ &= \sum_{u \geq 0} \psi_u \ \operatorname{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{s-u}) \end{aligned}$$

Comme pour tout u positif, $s - u$ est inférieur à s qui est strictement inférieur à t, il apparaît qu'on a toujours $t \neq s - u$, et donc que $\operatorname{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{s-u}) = 0$ car ε est un bruit blanc. La somme précédente est donc une somme de termes nuls, et est donc nulle. D'où $\operatorname{cov}(\varepsilon_t, X_s) = 0$.
En d'autres termes, ε_t est orthogonal à son passé strict $V^2(\varepsilon_v, v < t)$ car c'est un bruit blanc ; $V^2(\varepsilon_v, v < t)$ est égal à $V^2(X_v, v < t)$ car c'est le bruit blanc d'innovation associé à X ; donc ε_t est orthogonal à X_s si $s < t$.
On en déduit que pour tout $t \geq 2$, et même $t \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{cov}(\varepsilon_t, X_0) \\ &= \operatorname{cov}(X_t + 0{,}4X_{t-1} - 0{,}12X_{t-2}, X_0) \\ &= \operatorname{cov}(X_t, X_0) + 0{,}4 \ \operatorname{cov}(X_{t-1}, X_0) - 0{,}12 \ \operatorname{cov}(X_{t-2}, X_0) \\ &= \gamma_X(t) + 0{,}4\gamma_X(t-1) - 0{,}12\gamma_X(t-2) \\ &= \gamma_X(0)\big(\rho_X(t) + 0{,}4\rho_X(t-1) - 0{,}12\rho_X(t-2)\big) \end{aligned}$$

D'où l'égalité demandée.

4) Nous allons démontrer la formule par récurrence. Vérifions-la d'abord pour $t = 0$ et $t = 1$. En $t = 0$, c'est évident car $\rho_X(0) = 1$ et $\frac{2}{11}(0{,}2)^0 + \frac{9}{11}(-0{,}6)^0 = 1$. En $t = 1$, il faut commencer par calculer $\rho_X(1)$; or, d'après la formule du 3), on a

$$\rho_X(1) = -0{,}4\rho_X(0) + 0{,}12\rho_X(-1) = -0{,}4 + 0{,}12\rho_X(1)$$

D'où $\rho_X(1) = \frac{-0{,}4}{1-0{,}12} = -\frac{5}{11}$. D'autre part,

$$\frac{2}{11}(0{,}2)^1 + \frac{9}{11}(-0{,}6)^1 = \frac{1}{11}(0{,}4 - 5{,}4) = -\frac{5}{11}$$

La formule est donc démontrée pour $t = 0$ et $t = 1$. Posons maintenant comme hypothèse de récurrence

$$\text{H(t)} : \forall s \leq t \ \ \rho_X(s) = \frac{2}{11}(0{,}2)^s + \frac{9}{11}(-0{,}6)^s$$

H(1) est vraie ; montrons que $H(t)$ implique $H(t+1)$ quelque soit $t \geq 1$: soit $t \geq 1$ quelconque, alors

$$\begin{aligned}
\rho_X(t+1) &= -0{,}4\rho_X(t) + 0{,}12\rho_X(t-1) \text{ d'après 3)} \\
&= -0{,}4\Big(\frac{2}{11}(0{,}2)^t + \frac{9}{11}(-0{,}6)^t\Big) + 0{,}12\Big(\frac{2}{11}(0{,}2)^{t-1} + \frac{9}{11}(-0{,}6)^{t-1}\Big) \text{ d'après H(t)} \\
&= \frac{2}{11}(0{,}2)^{t-1}(-0{,}4 \times 0{,}2 + 0{,}12) + \frac{9}{11}(-0{,}6)^{t-1}(-0{,}4 \times 0{,}6 + 0{,}12) \\
&= \frac{2}{11}(0{,}2)^{t-1} \times 0{,}04 + \frac{9}{11}(-0{,}6)^{t-1} \times 0{,}36 \\
&= \frac{2}{11}(0{,}2)^{t+1} + \frac{9}{11}(-0{,}6)^{t+1}
\end{aligned}$$

ce qui montre H(t+1). La récurrence est ainsi établie, et la formule donnant $\rho_X(t)$ est donc vraie quelque soit $t \geq 0$.

5)

- $r_X(1) = \rho_X(1) = -5/11$
- $r_X(2)$ apparaît dans les équations de Yule-Walker d'ordre 2 comme le dernier des coefficients du vecteur "inconnu" :

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_X(1) \\ \rho_X(1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ r_X(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_X(1) \\ \rho_X(2) \end{pmatrix}$$

  Or ce sont aussi ces équations qui donnent les coefficients du modèle autorégressif (cf exercice 1). On en déduit que $r_X(2)$ est égal au coefficient de X_{t-2} dans le modèle AR(2) qui définit X, à savoir $r_X(2) = +0{,}12$ (attention au signe !).
- Pour $t > 2$, $r_X(t) = 0$, car il s'agit d'un AR(2) (cf exercice 1).

Exercice 4.

1) X et Y sont deux processus MA(2) (ou ARMA(0,2)) :

$$\begin{aligned}
X_t &= \theta(B)(\varepsilon)_t \quad \text{avec} \quad \theta(z) = 1 + 0{,}3z - 0{,}4z^2 \\
Y_t &= \theta'(B)(\varepsilon')_t \quad \text{avec} \quad \theta'(z) = 1 - 1{,}2z - 1{,}6z^2
\end{aligned}$$

De leur nature même, ces modèles sont causals (cf exercice 3, 2)). Afin de déterminer s'ils sont inversibles, il suffit de calculer les racines des polynômes $\theta(z)$ et $\theta'(z)$:

$$\begin{aligned}
\theta(z) &= (1 + 0{,}8z)(1 - 0{,}5z) \\
\theta'(z) &= (1 + 0{,}8z)(1 - 2z)
\end{aligned}$$

Les racines de $\theta(z)$ sont donc $-1{,}25$ et 2. Les racines sont de module strictement supérieur à 1, et le modèle définissant X est donc inversible.
Les racines de $\theta'(z)$ sont $-1{,}25$ et 0,5. L'une des racines est de module inférieur à 1, et le modèle définissant Y n'est donc pas inversible.

2) Fonction d'autocovariance de X (on se servira de façon intensive du fait que

$\mathrm{cov}(\varepsilon_i,\varepsilon_j) = 0$ si $i_not = j)$:

$$\begin{aligned}
\gamma_X(0) &= \mathrm{cov}(X_0;X_0) \\
&= \mathrm{cov}(\varepsilon_0 + 0{,}3\varepsilon_{-1} - 0{,}4\varepsilon_{-2};\varepsilon_0 + 0{,}3\varepsilon_{-1} - 0{,}4\varepsilon_{-2}) \\
&= \mathrm{cov}(\varepsilon_0;\varepsilon_0) + \mathrm{cov}(0{,}3\varepsilon_{-1};0{,}3\varepsilon_{-1}) + \mathrm{cov}(-0{,}4\varepsilon_{-2};-0{,}4\varepsilon_{-2}) \\
&\qquad \text{car les } \varepsilon_i \text{ sont décorrélés entre eux} \\
&= (1 + 0{,}3^2 + 0{,}4^2)\sigma_\varepsilon^2 = 1{,}25 \\
\gamma_X(1) &= \mathrm{cov}(X_1;X_0) \\
&= \mathrm{cov}(\varepsilon_1 + 0{,}3\varepsilon_0 - 0{,}4\varepsilon_{-1};\varepsilon_0 + 0{,}3\varepsilon_{-1} - 0{,}4\varepsilon_{-2}) \\
&= \mathrm{cov}(0{,}3\varepsilon_0;\varepsilon_0) + \mathrm{cov}(-0{,}4\varepsilon_{-1};0{,}3\varepsilon_{-1}) \\
&= (0{,}3 - 0{,}4 \times 0{,}3)\sigma_\varepsilon^2 = 0{,}18 \\
\gamma_X(2) &= \mathrm{cov}(X_2;X_0) \\
&= \mathrm{cov}(\varepsilon_2 + 0{,}3\varepsilon_1 - 0{,}4\varepsilon_0;\varepsilon_0 + 0{,}3\varepsilon_{-1} - 0{,}4\varepsilon_{-2}) \\
&= \mathrm{cov}(-0{,}4\varepsilon_0;\varepsilon_0) \\
&= -0{,}4\sigma_\varepsilon^2 = -0{,}4 \\
\gamma_X(t) &= 0 \text{ si } t > 2, \text{ car } X \text{ est un MA}(2)
\end{aligned}$$

Fonction d'autocovariance de Y :

$$\begin{aligned}
\gamma_Y(0) &= \mathrm{cov}(Y_0;Y_0) \\
&= \mathrm{cov}(\varepsilon'_0 - 1{,}2\varepsilon'_{-1} - 1{,}6\varepsilon'_{-2};\varepsilon'_0 - 1{,}2\varepsilon'_{-1} - 1{,}6\varepsilon'_{-2}) \\
&= \mathrm{cov}(\varepsilon'_0;\varepsilon'_0) + \mathrm{cov}(-1{,}2\varepsilon'_{-1};-1{,}2\varepsilon'_{-1}) + \mathrm{cov}(-1{,}6\varepsilon'_{-2};-1{,}6\varepsilon'_{-2}) \\
&= (1 + 1{,}2^2 + 1{,}6^2)\sigma_{\varepsilon'}^2 = 1{,}25 \\
\gamma_Y(1) &= \mathrm{cov}(Y_1;Y_0) \\
&= \mathrm{cov}(\varepsilon'_1 - 1{,}2\varepsilon'_0 - 1{,}6\varepsilon'_{-1};\varepsilon'_0 - 1{,}2\varepsilon'_{-1} - 1{,}6\varepsilon'_{-2}) \\
&= \mathrm{cov}(-1{,}2\varepsilon'_0;\varepsilon'_0) + \mathrm{cov}(-1{,}6\varepsilon'_{-1};-1{,}2\varepsilon'_{-1}) \\
&= (-1{,}2 + 1{,}6 \times 1{,}2)\sigma_{\varepsilon'}^2 = 0{,}18 \\
\gamma_Y(2) &= \mathrm{cov}(Y_2;Y_0) \\
&= \mathrm{cov}(\varepsilon'_2 - 1{,}2\varepsilon'_1 - 1{,}6\varepsilon'_0;\varepsilon'_0 - 1{,}2\varepsilon'_{-1} - 1{,}6\varepsilon'_{-2}) \\
&= \mathrm{cov}(-1{,}6\varepsilon'_0;\varepsilon'_0) \\
&= -1{,}6\sigma_{\varepsilon'}^2 = -0{,}4 \\
\gamma_Y(t) &= 0 \text{ si } t > 2, \text{ car } Y \text{ est un MA}(2)
\end{aligned}$$

X et Y ont donc même fonction d'autocovariance. Celle-ci déterminant toutes les propriétés de second ordre du processus, il s'agit donc de deux processus "semblables" quoique donnés par des modèles différents. Ceci s'explique facilement en montrant qu'on peut définir Y par le même modèle que X. En effet, posons $\varepsilon'' = (1-2B)(1-0{,}5B)^{-1}(\varepsilon')$. La densité spectrale de ε'' vaut :

$$\begin{aligned}
f_{\varepsilon''}(\lambda) &= \left|\frac{1-2e^{i\lambda}}{1-0{,}5e^{i\lambda}}\right|^2 \times f_{\varepsilon'}(\lambda) \\
&= \frac{5 - 4\cos\lambda}{1{,}25 - \cos\lambda} \times \frac{\sigma_{\varepsilon'}^2}{2\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}
\end{aligned}$$

ε'' a une densité spectrale constante ; c'est donc un bruit blanc de variance $2\pi f_{\varepsilon''}(\lambda) = 1$, de même variance donc que ε. De plus,

$$\begin{aligned} Y &= (1+0{,}8B)(1-2B)(\varepsilon') \\ &= (1+0{,}8B)(1-0{,}5B)(1-0{,}5B)^{-1}(1-2B)(\varepsilon') \\ &= (1+0{,}8B)(1-0{,}5B)(\varepsilon'') \\ &= \theta(B)(\varepsilon'') \end{aligned}$$

X et Y sont donc deux MA(2) qui peuvent être définis par un même modèle et associés à des bruits blancs de même variance. Rien d'étonnant à ce qu'ils aient même autocovariance.