Université Paris 5 - René Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

MST ISASH 2ème année

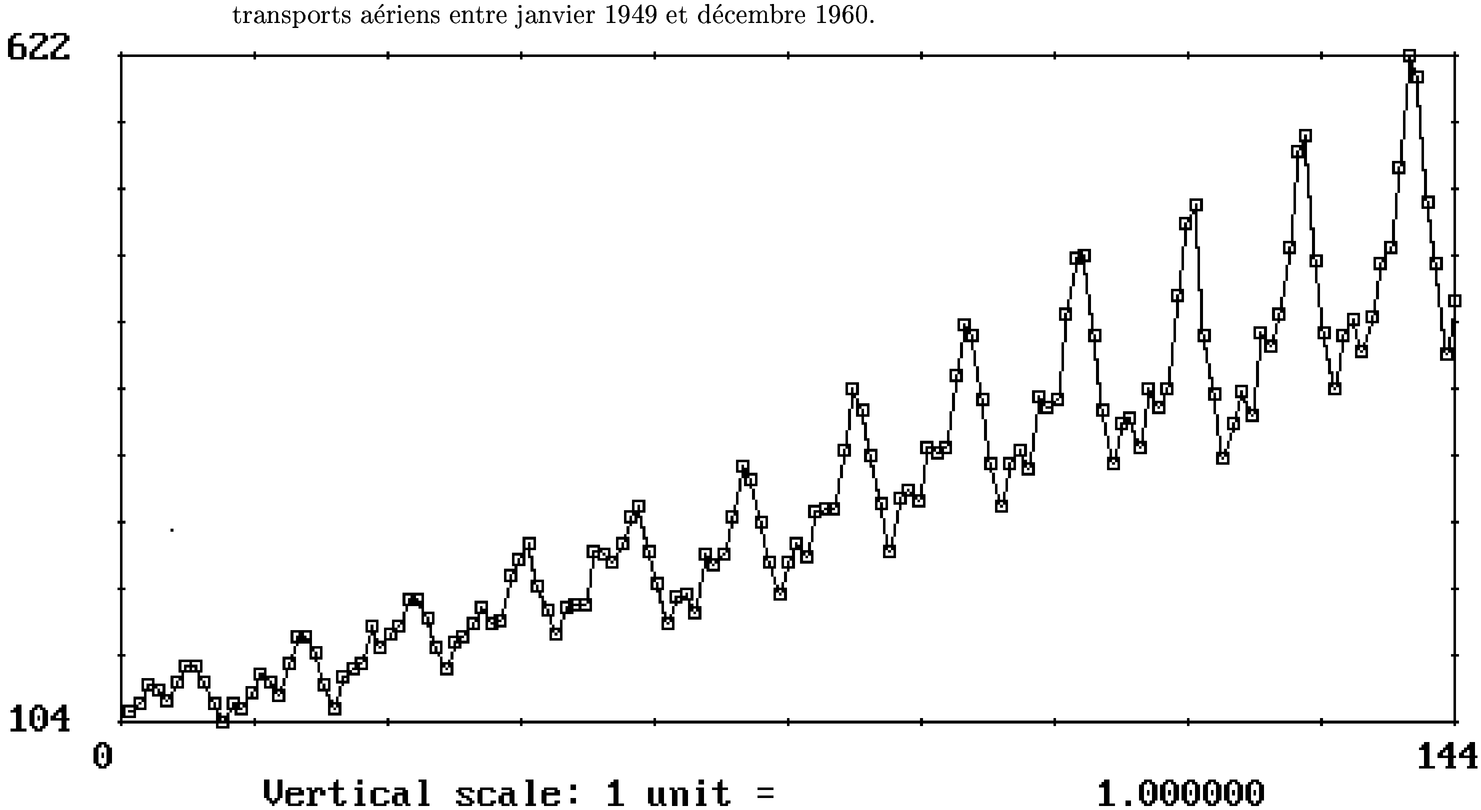
Maîtrise MASS

Examen du 29 mai 2000

14h-17h

Le sujet comporte deux pages.

Ex 1. On considère la série temporelle suivante, qui dénombre mensuellement les passagers des transports aériens entre janvier 1949 et décembre 1960.



Le périodogramme (lissé) fait apparaître une très forte valeur du spectre correspondant à une période de 12 mois. Proposer 3 approches permettant de ramener l'étude de cette série temporelle à celle d'une série qu'on puisse espérer modéliser à l'aide d'un processus ARMA stationnaire.

Ex 2. Soit $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus stationnaire de type AR(1), vérifiant l'équation

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

avec ε un bruit blanc gaussien de variance σ_ε^2.

1) Déterminer la matrice de covariance du vecteur aléatoire (X_1, X_2), en fonction de ϕ et $\varepsilon_\varepsilon^2$. En déduire la densité de la loi de (X_1, X_2).

On rappelle que si det $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \neq 0$, alors $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

2) On suppose connues deux observations x_1 et x_2 du processus X aux instants 1 et 2. Déterminer les estimateurs du maximum de vraisemblance de ϕ et σ_ε^2 en fonction de x_1 et x_2.

Ex 3. Soit $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus du second ordre, faiblement stationnaire de type AR(1) :

$$X_n = \varepsilon_n + 0{,}6 X_{n-1}$$

avec ε bruit blanc de variance $\sigma_\varepsilon^2 = 0{,}036$. Soit ε' un bruit blanc de variance $\sigma_{\varepsilon'}^2 = 0{,}016$, indépendant de ε.

a) Montrer que le processus $(\varepsilon'_t + 1{,}5 X_t, t \in \mathbb{Z})$ est faiblement stationnnaire. En déduire qu'il existe une solution faiblement stationnaire à l'équation

$$\forall t \in \mathbb{Z},\ \ Y_t = 0{,}4 Y_{t-1} + \varepsilon'_t + 1{,}5 X_t$$

b) Calculer la densité spectrale de Y.

c) Montrer que Y est un ARMA dont on précisera les ordres autorégressif et moyenne mobile (Indication : on pourra raisonner en se servante de la densité spectrale, ou en considérant le processus $(1 - 0{,}4B)(1 - 0{,}6B)(Y)$).

d) Donner de Y sa représentation de Wold, et préciser le calcul du bruit blanc d'innovation associé à Y en fonction de ε et ε'.

Ex 4. Soit S_ε l'ensemble des processus du second ordre qui vérifient l'équation de récurrence

$$X_t = \varepsilon_t + 2\cos(\pi/3) X_{t-1} - X_{t-2}$$

avec ε bruit blanc de variance σ_ε^2.

a) Montrer que si X appartient à S_ε, alors le processus $(X_t + A + B\cos(t\pi/3) + C\sin(t\pi/3), t \in \mathbb{Z})$ appartient aussi à S_ε, avec A,B et C variables aléatoires quelconques.

b) Soit $X \in S_\varepsilon$; que peut-on dire des relations entre les espaces linéaires $V^2(X_j, -\infty < j \leq t)$ et $V^2(\varepsilon_j, -\infty < j \leq t)$?

c) Soit X élément de S_ε tel que $V^2(X_j, -\infty < j \leq t) = V^2(\varepsilon_j, -\infty < j \leq t)$ quel que soit $t \in \mathbb{Z}$. On suppose qu'on observe le processus entre les instants 1 et N, et on s'intéresse à la fonction de prévision $\bar{X}_N(h) = P^{\perp}_{V^2(X_j, 1 \leq j \leq N)}(X_{N+h})$. Déterminer cette fonction, en précisant les valeurs pivotales, et donner la variance de l'erreur de prévision aux horizons $h = 1$,2 et 3.

Ex 5. 1) Soit $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus stationnaire vérifiant

$$X_t = \varepsilon_t + \phi X_{t-12}$$

avec ε bruit blanc. Déterminer sa fonction d'autocorrélation.

2) Soit $x = (x_1, \ldots, x_N)$ une série temporelle dont la fonction d'autocorrélation estimée a l'allure suivante :

$$\hat{\rho}(12j) \approx (0{,}7)^j,\ \ j = 0,1,\ldots \tag{1}$$
$$\hat{\rho}(12j \pm 1) \approx 0{,}4 \times (0{,}7)^j,\ \ j = 0,1,\ldots \tag{2}$$
$$\hat{\rho}(h) \approx 0 \text{ sinon.} \tag{3}$$

Proposer, en le justifiant, un modèle ARMA(12,1), pour cette série.