

MST ISASH 2ème année

Maîtrise MASS

Partiel du 29 mars 2000

8h45 - 10h45

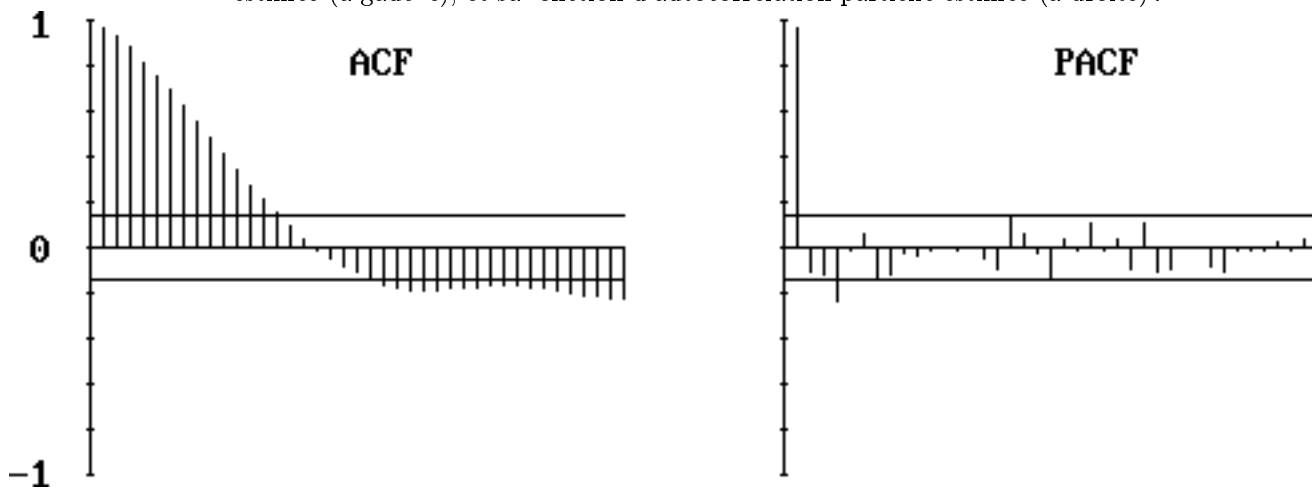
Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Le sujet comporte deux pages.

On rappelle que  $B$  désigne l'opérateur retard  $B(x)_t = x_{t-1}$ , et que l'on note

$$B^p \equiv B^{\circ p} = \underbrace{B \circ B \circ \dots \circ B}_{p \text{ fois}}$$

**Ex 1.** On trace pour une série temporelle  $x = (x_t, t \in \{1, \dots, 200\})$  sa fonction d'autocorrélation estimée (à gauche), et sa fonction d'autocorrélation partielle estimée (à droite) :



On donne les premières valeurs de la fonction d'autocorrélation estimée:

$$\hat{\rho}_x(1) = 0,966$$

$$\hat{\rho}_x(2) = 0,925$$

$$\hat{\rho}_x(3) = 0,878$$

$$\hat{\rho}_x(4) = 0,816$$

$$\hat{\rho}_x(5) = 0,753$$

Proposer un modèle de type  $MA(q)$  ou  $AR(p)$  pour cette série. Donner les équations qui permettent d'en calculer les coefficients (on ne demande pas de les résoudre).

**Ex 2.** On considère le filtre

$$\phi = \frac{1}{9}(8I + B + 3B^2 - 5B^3 + 2B^4)$$

Montrer qu'il annule les composantes saisonnières de période 3, et qu'il conserve les tendances polynômiales de degré inférieur ou égal à deux.

$\phi$  est-il un filtre inversible?

**Ex 3.** Soit  $\varepsilon$  un bruit blanc faible et  $X$  un processus stationnaire du second ordre vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{Z} \quad X_t + 0,4X_{t-1} - 0,12X_{t-2} = \varepsilon_t$$

1. De quel modèle ARMA s'agit-il?
2. Montrer que  $\varepsilon$  est le bruit blanc d'innovation associé à  $X$ .
3. En déduire que  $\text{cov}(\varepsilon_t, X_s) = 0$  pour tout couple  $s < t$ , puis que la fonction d'autocorrélation de  $X$  vérifie la relation de récurrence

$$\rho_X(t) = -0,4\rho_X(t-1) + 0,12\rho_X(t-2) \quad \forall t \geq 2$$

4. Montrer que

$$\rho_X(t) = \frac{2}{11}(0,2)^t + \frac{9}{11}(-0,6)^t \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

5. Déterminer la fonction d'autocorrélation partielle  $r_X$  de  $X$ .

**Ex 4.** Soient  $X$  et  $Y$  les processus définis par

$$X_t = \varepsilon_t + 0,3\varepsilon_{t-1} - 0,4\varepsilon_{t-2}$$

$$Y_t = \varepsilon'_t - 1,2\varepsilon'_{t-1} - 1,6\varepsilon'_{t-2}$$

avec  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  deux bruits blancs de variances  $\sigma_\varepsilon^2 = 1$  et  $\sigma_{\varepsilon'}^2 = 1/4$ .

1. De quel type de processus ARMA s'agit-il? Préciser pour chacun si le modèle qui le définit est causal ou inversible.
2. Calculer et comparer les fonctions d'autocovariance de  $X$  et  $Y$ . Expliquer.

**Question de cours.** Rappeler les définitions de la stationnarité stricte, faible, d'un bruit blanc fort, faible.