Université Paris 5 - René Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

MST ISASH 2ème année

Maîtrise MASS

Examen du 29 mai 2000

14h-17h

Le sujet comporte deux pages.

Ex 1. Soit $X = (X_n, n \in \mathbb{N}^*)$ un processus défini par $X_n = \cos(nU)$, où U suit une loi uniforme sur $[-\pi,\pi]$.
1) Montrer que X est faiblement stationnaire.
2) Montrer que X n'est pas strictement stationnaire.

Ex 2. Soit X le processus faiblement stationnaire vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{Z},\, X_t = 2X_{t-1} + \varepsilon_t + 3\varepsilon_{t-1}$$

avec ε bruit blanc faible de variance 1.
1) De quel type de processus s'agit-il? Est-il ici donné sous forme causale et inversible?
2) Calculer le bruit blanc d'innovation associé à X en fonction de ε.
3) Déterminer la repésentation de Wold de X.

Ex 3. Soit $\phi = \sum_{n=-p}^{q} a_n B^n$ un filtre linéaire. Montrer qu'il conserve les tendances polynômiales de degré inférieur ou égal à 3 si et seulement si

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=-p}^{q} a_n = 1 \text{ et} \\ \displaystyle\sum_{n=-p}^{q} a_n n^j = 0,\ \forall j = 1,2,3 \end{cases}$$

Ex 4. Soit X un processus faiblement stationnaire de type MA(1), vérifiant :

$$X_t = \varepsilon_t + 0{,}6\varepsilon_{t-1} \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

avec ε bruit blanc faible de variance 1.
1) Déterminer les scalaires α_n tels que

$$\forall t \in \mathbb{Z} \quad \varepsilon_t = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n X_{t-n}$$

On définit, à l'aide de l'algorithme des innovations, les variables aléatoires $\bar{\varepsilon}_t$ et les coefficients $(\theta_{n,t})_{0 \le n < t}$ tels que

$$\bar{\varepsilon}_t = X_t - P^{\perp}_{V^2(X_1,\dots,X_{t-1})}(X_t)$$
$$X_t = \sum_{n=0}^{t-1} \theta_{n,t} \bar{\varepsilon}_{t-n}$$

2) Que vaut $\theta_{0,t}$? Que valent $\theta_{n,t}$ pour $n \geq 2$?
3) Montrer que $\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}[(\bar{\varepsilon}_t - \varepsilon_t)^2] = 0$.
4) En déduire la limite de $\theta_{1,t}$, quand t tend vers l'infini.
5) Déterminer en fonction de $\bar{\varepsilon}$ et de $\theta_{1,t}$ les prédicteurs linéaires $\bar{X}_N(h) = P^{\perp}_{V^2(X_1,\dots,X_N)}(X_{N+h})$, ainsi que la variance des erreurs de prédiction. En donner une approximation pour N grand.

Ex 5. On considère le processus ARMA(1,1) X vérifiant

$$X_t - 0{,}8X_{t-1} = \varepsilon_t + 0{,}3\varepsilon_{t-1}$$

avec ε bruit blanc gaussien de variance 1. Soit $x = (x_1,\dots,x_{200})$ une réalisation de ce processus entre $t = 1$ et $t = 200$. Sur le graphe ci-dessous, on a représenté la densité spectrale de X, ainsi que le périodogramme de x, entre 0 et π($\sim$ 100 sur le graphe). Commenter.