

## Corrigé de l'examen de Méthodologie Mathématique

Mercredi 11 juin 8h-10h

**Exercice 1.** La première étape du calcul consiste à modifier l'ordre de sommation. Posons

$$a_{i,j} = \frac{j^{i-j}}{j^{n+2-j} - 1}.$$

On souhaite récrire la somme  $v_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^{i+1} a_{i,j}$  sous la forme  $v_n = \sum_{j=?}^? \sum_{i=?}^? a_{i,j}$ . Notons  $E$  l'ensemble des couples d'indices qui apparaissent dans la première somme. Alors

$$\begin{aligned} (i,j) \in E &\iff \begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ 2 \leq j \leq i+1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2 \leq i+1 \leq n+1 \\ 2 \leq j \leq i+1 \end{cases} \\ &\iff 2 \leq j \leq i+1 \leq n+1 \\ &\iff \begin{cases} 2 \leq j \leq n+1 \\ j \leq i+1 \leq n+1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2 \leq j \leq n+1 \\ j-1 \leq i \leq n \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit

$$v_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^{i+1} a_{i,j} = \sum_{j=2}^{n+1} \sum_{i=j-1}^n a_{i,j}$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{i=j-1}^n a_{i,j} &= \sum_{i=j-1}^n \frac{j^{i-j}}{j^{n+2-j} - 1} \\ &= \frac{1}{j(j^{n+2-j} - 1)} \sum_{i=j-1}^n j^{i-(j-1)} \\ &= \frac{1}{j(j^{n+2-j} - 1)} \sum_{p=0}^{n-(j-1)} j^p \text{ en posant } p = i - (j-1) \\ &= \frac{1}{j(j^{n+2-j} - 1)} \frac{j^{n-(j-1)+1} - 1}{j-1} \text{ car } 1 + \rho + \dots + \rho^k = \frac{\rho^{k+1} - 1}{\rho - 1} \text{ si } \rho \neq 1 \\ &= \frac{1}{j(j-1)} \end{aligned}$$

Or  $\frac{1}{j(j-1)}$ , considéré comme fraction rationnelle en  $j$ , se décompose en éléments simples sous la forme

$$\frac{1}{j(j-1)} = \frac{a}{j} + \frac{b}{j-1}.$$

Le calcul de  $a$  et  $b$  se fait "à vue d'œil", ou selon les procédés classiques ; par exemple, on évalue l'expression

$$\frac{1}{j-1} = a + \frac{bj}{j-1}$$

en  $j = 0$ , et on en déduit  $a = -1$ . De même, on détermine  $b = 1$ . D'où finalement

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{j=2}^{n+1} \sum_{i=j-1}^n a_{i,j} \\ &= \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j(j-1)} \\ &= \sum_{j=2}^{n+1} \left( \frac{-1}{j} + \frac{1}{j-1} \right) \\ &= -\sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} + \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j-1} \\ &= -\sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} + \sum_{j'=1}^n \frac{1}{j'} \text{ en posant } j' = j-1 \\ &= -\frac{1}{n+1} + 1 \end{aligned}$$

après élimination des termes qui se soustraient deux à deux dans l'avant-dernière ligne. Le résultat demandé vaut donc  $v_n = \frac{n}{n+1}$ .

**Exercice 2.** On procède par récurrence. On pose pour tout  $n \geq 1$

$$H(n) : \frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leq C_{2n}^n$$

1. Cas  $n = 1$  :  $\frac{4^1}{2\sqrt{1}} = 2$  et  $C_2^1 = 2$  ; donc  $H(1)$  est vraie.
2. Soit  $n \geq 1$  quelconque. On suppose  $H(n)$  vraie. Montrons qu'alors  $H(n+1)$  est vraie aussi :

$$\begin{aligned} \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}} &= \frac{4^n}{2\sqrt{n}} \times 4\sqrt{\frac{n}{n+1}} \\ &\leq C_{2n}^n \times 4\sqrt{\frac{n}{n+1}} \text{ d'après } H(n) \\ &= C_{2(n+1)}^{n+1} \times \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \times 4\sqrt{\frac{n}{n+1}} \\ &= C_{2(n+1)}^{n+1} \times \frac{2n+2}{2n+1} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \end{aligned}$$

Or  $\frac{2n+2}{2n+1}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$  est inférieur à 1 ; en effet :

$$\begin{aligned} \frac{2n+2}{2n+1}\sqrt{\frac{n}{n+1}} \leq 1 &\iff \frac{(2n+2)^2}{(2n+1)^2} \frac{n}{n+1} \leq 1 \text{ car } x \mapsto x^2 \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^+ \\ &\iff \frac{2n(2n+2)}{(2n+1)^2} \leq 1 \\ &\iff \frac{(2n+1)^2 - 1}{(2n+1)^2} \leq 1 \end{aligned}$$

La dernière assertion étant à l'évidence vraie, on en déduit  $\frac{2n+2}{2n+1}\sqrt{\frac{n}{n+1}} \leq 1$ , et partant

$$\frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}} \leq C_{2(n+1)}^{n+1}$$

Autrement dit,  $H(n+1)$  est vraie.

3. On a donc montré par récurrence que  $H(n)$  est vraie pour tout  $n \geq 1$ .

### Exercice 3.

– Transcription en langage formel :

1.  $(\forall x)(\forall y)\left((P(x) \text{ et } J(y)) \implies O(x, y)\right)$ . Ou, de façon équivalente,  $(\forall x)(\forall y)\left(P(x) \implies (J(y) \implies O(x, y))\right)$ .
2.  $(\forall y)(\exists x)\left(J(y) \implies (P(x) \text{ et } O(x, y))\right)$ .
3.  $(\exists x)(\forall y)\left(P(x) \text{ et } (J(y) \implies O(x, y))\right)$ .
4.  $(\forall x)(\exists y)\left(P(x) \implies (J(y) \text{ et non } O(x, y))\right)$ .

– Négation de la phrase 2 : il y a un jour de l'année où aucune pharmacie n'est ouverte.

– Énoncés équivalents : aucun.

– Énoncés qui sont négation l'un de l'autre : 3 et 4 ; en effet

$$\begin{aligned} &\text{non}\left((\exists x)(\forall y)\left(P(x) \text{ et } (J(y) \implies O(x, y))\right)\right) \\ &\iff (\forall x)(\exists y)\text{non}\left(P(x) \text{ et } (J(y) \implies O(x, y))\right) \\ &\iff (\forall x)(\exists y)\left(P(x) \implies \text{non}(J(y) \implies O(x, y))\right) \\ &\iff (\forall x)(\exists y)\left(P(x) \implies (J(y) \text{ et non}(O(x, y)))\right) \end{aligned}$$

où l'on s'est servi à deux reprises de ce que  $(A \implies B) \iff \text{non}(A \text{ et non}(B))$  quelles que soient les propositions  $A$  et  $B$ . Ce qui montre bien  $\text{non}(3) \iff 4$ .

– Énoncés qui s'impliquent : 1 implique 3, qui implique 2 ; en effet,

– 1 implique 3, car  $(\forall x)(P(x) \implies A(x))$  implique  $(\exists x)(P(x) \text{ et } A(x))$ , quelle que soit la formule  $A$  (ici  $A(x)$  est  $(\forall y)(J(y) \implies O(x, y))$ ).

- 3 implique 2, car, d'une part,  $(J(y) \implies (P(x) \text{ et } O(x, y)))$  est équivalent à  $(P(x) \text{ et } (J(y) \implies O(x, y)))$  (on le vérifie facilement avec un tableau de vérité); d'autre part,  $(\exists x)(\forall y)(A(x, y))$  implique  $(\forall y)(\exists x)(A(x, y))$ , quelle que soit la formule  $A$ .

**Exercice 4.**

1. Montrons  $f(\cap_{i \in I} A_i) \subset \cap_{i \in I} f(A_i)$ , autrement dit que

$$(\forall y \in F) (y \in f(\cap_{i \in I} A_i) \implies y \in \cap_{i \in I} f(A_i))$$

Soit  $y \in F$  quelconque. Alors

$$\begin{aligned} y \in f(\cap_{i \in I} A_i) &\iff (\exists x \in E) (x \in \cap_{i \in I} A_i \text{ et } y = f(x)) \\ &\iff (\exists x \in E) (\forall i \in I) (x \in A_i \text{ et } y = f(x)) \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} y \in \cap_{i \in I} f(A_i) &\iff (\forall i \in I) (y \in f(A_i)) \\ &\iff (\forall i \in I) (\exists x \in E) (x \in A_i \text{ et } y = f(x)) \end{aligned}$$

Or on sait que

$$(\exists x \in E) (\forall i \in I) (A(x, i)) \implies (\forall i \in I) (\exists x \in E) (A(x, i))$$

quelle que soit la proposition logique  $A(x, i)$ . En choisissant  $A(x, i)$  égale à “ $x \in A_i$  et  $y = f(x)$ ”, on en déduit

$$y \in f(\cap_{i \in I} A_i) \implies y \in \cap_{i \in I} f(A_i)$$

ce qui établit bien ce qu'on voulait démontrer. Il n'y a pas en général inclusion dans l'autre sens. Voici un contre-exemple :  $E = F = I = \{0, 1\}$ ,  $A_0 = \{0\}$ ,  $A_1 = \{1\}$ , et  $f$  est application telle que  $f(0) = f(1) = 0$ . Alors  $\cap_{i \in I} A_i = \emptyset$ ,  $f(\cap_{i \in I} A_i) = \emptyset$ , et  $\cap_{i \in I} f(A_i) = \{0\}$ .

2. Montrons  $\cup_{i \in I} f^{-1}(B_i) = f^{-1}(\cup_{i \in I} B_i)$ , autrement dit

$$(\forall x \in E) (x \in \cup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \iff x \in f^{-1}(\cup_{i \in I} B_i))$$

Soit  $x \in E$  quelconque. Alors

$$\begin{aligned} x \in \cup_{i \in I} f^{-1}(B_i) &\iff (\exists i \in I) (x \in f^{-1}(B_i)) \\ &\iff (\exists i \in I) (f(x) \in B_i) \\ &\iff (f(x) \in \cup_{i \in I} B_i) \\ &\iff x \in f^{-1}(\cup_{i \in I} B_i) \end{aligned}$$

ce qui établit bien ce qu'on voulait démontrer.