Université de Paris 5 – René Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Corrigé du partiel de Méthodologie Mathématique

Mercredi 23 avril 2003 12h15-14h15

Exercice 1.

1. *Soient E, F et G des espaces vectoriels, et f et g des applications linéaires de E dans F, et de F dans G respectivement. Alors*

$$Ker\,(g \circ f) = f^{-1}\,(Ker\,(g))$$

Démonstration :

- Montrons $f^{-1}\,(Ker\,(g)) \subset Ker\,(g \circ f)$, puis $Ker\,(g \circ f) \subset f^{-1}\,(Ker\,(g))$.
- Soit $x \in f^{-1}\,(Ker\,(g))$ quelconque.
- Alors il existe $y \in Ker\,(g)$ tel que $f(x) = y$.
- Or $g(y) = 0$.
- Donc $g \circ f(x) = g(y) = 0$.
- Autrement dit, $x \in Ker\,(g \circ f)$.
- Soit $x' \in Ker\,(g \circ f)$ quelconque.
- Alors $g \circ f(x') = g\,(f\,(x')) = 0$.
- Donc $f(x') \in Ker(g)$.
- Ce qui signifie que $x' \in f^{-1}\,(Ker(g))$

2. *Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Alors* $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

Démonstration :

- Montrons $\sup(A \cup B) \geq \max(\sup A, \sup B)$ et $\sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B)$.
- Comme $A \subset A \cup B$, $\sup A \cup B$ est un majorant de A.
- On en déduit $\sup A \leq \sup A \cup B$.
- De même, $\sup B \leq \sup A \cup B$.
- En conséquence, $\max(\sup A, \sup B) \leq \sup A \cup B$.
- On peut supposer par exemple $\sup A \leq \sup B$.
- Alors $\sup B$ est un majorant de A et de B, donc de $A \cup B$.
- Donc $\sup(A \cup B) \leq \sup B = \max(\sup A, \sup B)$.

Exercice 2. *Soit* $(u_n, n \in \mathbb{N})$ *une suite de réels telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}.$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 2$$

- Erreurs de raisonnement
  - ligne 6 : si $|u_n| < 2$, alors $\frac{1}{2} < \frac{1}{|u_n|}$ et $\varepsilon < \frac{2\varepsilon}{|u_n|}$.
- Étapes du raisonnement correctes
  - l'inégalité $\left|u_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ implique bien l'inégalité ligne 4.
  - les deux inégalités lignes 4 et 6 impliquent bien l'inégalité $\left|\frac{1}{u_n} - 2\right| < \varepsilon$ ligne 8.
- Étapes manquantes
  - lignes 4 et suivantes : on ne peut diviser par $|u_n|$ que si $u_n \neq 0$, ce qui n'est pas évoqué.
  - ligne 5 : si u_n tend vers $\frac{1}{2}$, alors $|u_n|$ est inférieur à 2, mais à partir d'un certain rang seulement, ce qui n'est pas rappelé.
  - ligne 8 : il n'est pas explicité que $\left|\frac{1}{u_n} - 2\right| = \left|\frac{\frac{1}{2}-u_n}{\frac{u_n}{2}}\right|$.
- Défauts de rédaction
  - ligne 3 : le signe $\Longrightarrow$ est utilisé en lieu et place de "Donc".
  - lignes 3 et 4 : ε et n_0 n'ont pas été correctement définis. Ils apparaissent dans la formule ligne 2 comme des variables "liées" ou "locales", introduites par des quantificateurs, et ne sont donc pas déterminés en dehors de la formule.
  - ligne 5 : il faut indiquer ce vers quoi n tend.

Démonstration corrigée : Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$, et que $\min(\varepsilon/8, 1/4)$ est strictement positif, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$(\forall n \geq n_0)\left(\left|u_n - \frac{1}{2}\right| < \min(\varepsilon/8, 1/4)\right)$$

Soit $n \geq n_0$ quelconque. Comme $\left|u_n - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{4}$, alors $u_n \in \left]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right[$. En particulier, $u_n \neq 0$ et $u_n > 1/4$. D'où

$$\frac{1}{|u_n|} < 4$$

On en déduit

$$\left|\frac{1}{u_n} - 2\right| = 2\frac{1}{|u_n|}\left|\frac{1}{2} - u_n\right| < 8\left|\frac{1}{2} - u_n\right|$$

Or on a aussi $\left|u_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon/8$. Donc

$$\left|\frac{1}{u_n} - 2\right| < 8\frac{\varepsilon}{8} = \varepsilon$$

On a donc montré

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq n_0)\left(\left|\frac{1}{u_n} - 2\right| < \varepsilon\right)$$

Autrement dit, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 2$.

Exercice 3. Soient A et B deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$, tels que, quels que soient $x \in A$ et $y \in B$, $x \leq y$. Montrer, en attachant le plus grand soin à la rédaction, que $\sup A$ et $\inf B$ existent dans $\mathbb{R}$, et qu'ils vérifient $\sup A \leq \inf B$.

Démonstration : Tout élément de B, et il en existe, est un majorant de A. Comme tout sous-ensemble majoré de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure, $\sup A$ existe dans $\mathbb{R}$. De même, $\inf B$ existe dans $\mathbb{R}$. Soit $y \in B$ quelconque ; y est un majorant de A. Or on sait $\sup A$ est le plus petit des majorants de A. Donc $\sup A \leq y$. $\sup A$ est donc un minorant de B. Or $\inf B$ est le plus grand des minorants de B. Donc $\sup A \leq \inf B$.

Exercice 4. Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$, et x_0 et l deux réels. Démontrer, en attachant le plus grand soin à la rédaction, l'équivalence suivante :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff (\forall \varepsilon \in]0,1[)\,(\exists \eta \in]0,1[)\,(\forall x \in \mathbb{R})\,(|x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

Démonstration : Par définition,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta > 0)\,(\forall x \in \mathbb{R})\,(|x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

Montrons d'abord l'implication. On suppose $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.
Soit $\varepsilon \in]0,1[$. D'après l'hypothèse, il existe $\eta_1 > 0$ tel que

$$(\forall x \in \mathbb{R})\,(|x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

Posons $\eta = \min(\eta_1, 1/2) \in]0,1[$. Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Si $|x - x_0| < \eta$, alors $|x - x_0| < \eta_1$; donc $|f(x) - l| < \varepsilon$. On a donc montré

$$(\forall \varepsilon \in]0,1[)\,(\exists \eta \in]0,1[)\,(\forall x \in \mathbb{R})\,(|x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon) \qquad (1)$$

Montrons la réciproque. On suppose (**??**).
Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. D'après l'hypothèse, comme $\min(\varepsilon, 1/2) \in]0,1[$, il existe $\eta > 0$ (et < 1) tel que

$$(\forall x \in \mathbb{R})\,(|x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \min(\varepsilon, 1/2))$$

Comme $\min(\varepsilon, 1/2) \leq \varepsilon$, on en déduit

$$(\forall x \in \mathbb{R})\,(|x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

On a donc montré

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta > 0)\,(\forall x \in \mathbb{R})\,(|x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

Autrement dit, $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.
Ce qui achève la démonstration