

## Examen de Méthodologie Mathématique

Mercredi 11 juin 8h-10h

Les documents, calculatrices, et téléphones portables ne sont pas autorisés  
Attention : rédiger les solutions des différents exercices sur des feuilles séparées

**Exercice 1.** Calculer

$$v_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^{i+1} \frac{j^{i-j}}{j^{n+2-j} - 1}$$

**Exercice 2.** Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leq C_{2n}^n$$

**Exercice 3.** On considère les prédicats

$$\begin{aligned} P(x) &= \text{“ } x \text{ est une pharmacie “} \\ J(y) &= \text{“ } y \text{ est un jour (de l'année) “} \\ O(x, y) &= \text{“ } x \text{ est ouvert durant } y \text{ “} \end{aligned}$$

Transcrire, en utilisant les symboles de prédicats ci-dessus, les phrases suivantes dans la notation du calcul des prédicats (ou langage formel) :

1. Toutes les pharmacies sont ouvertes tous les jours (de l'année).
2. Tous les jours (de l'année), il y a une pharmacie ouverte.
3. Il y a une pharmacie ouverte tous les jours (de l'année).
4. Chaque pharmacie ferme au moins un jour par an.

Donner, en langage courant, la négation de la phrase 2. Parmi les énoncés ci-dessus, y en a-t-il qui soient équivalents ? qui soient négation l'un de l'autre ? y en a-t-il un (ou plusieurs) qui en implique(nt) d'autre(s) ?

**Exercice 4.** Soit  $f$  une application d'un ensemble  $E$  dans un ensemble  $F$ ,  $I$  un ensemble d'indices,  $(A_i, i \in I)$  une famille de sous-ensembles de  $E$ , et  $(B_i, i \in I)$  une famille de sous-ensembles de  $F$ .

1. Comparer  $\bigcap_{i \in I} f(A_i)$  et  $f(\bigcap_{i \in I} A_i)$  (sont-ils inclus l'un dans l'autre ? sont-ils égaux ? s'ils ne sont égaux en règle générale, trouver un contre-exemple).
2. Comparer  $\bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$  et  $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i)$ .