Université de Paris 5 – René Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Partiel de Méthodologie Mathématique

Mercredi 23 avril 12h15-14h15
Le sujet comporte deux pages
Les documents, calculatrices, et téléphones portables ne sont pas autorisés
Attention : rédiger les solutions des différents exercices sur des feuilles séparées

Exercice 1. Remettre dans l'ordre les démonstrations suivantes :

1. *Soient E, F et G des espaces vectoriels, et f et g des applications linéaires de E dans F, et de F dans G respectivement. Alors*

$$Ker\,(g \circ f) = f^{-1}\,(Ker\,(g))$$

Démonstration :

(a) Alors $g \circ f(x') = g\,(f\,(x')) = 0$.
(b) Alors il existe $y \in Ker\,(g)$ tel que $f(x) = y$.
(c) Autrement dit, $x \in Ker\,(g \circ f)$.
(d) Ce qui signifie que $x' \in f^{-1}\,(Ker(g))$
(e) Donc $f(x') \in Ker(g)$.
(f) Donc $g \circ f(x) = g(y) = 0$.
(g) Montrons $f^{-1}\,(Ker\,(g)) \subset Ker\,(g \circ f)$, puis $Ker\,(g \circ f) \subset f^{-1}\,(Ker\,(g))$.
(h) Or $g(y) = 0$.
(i) Soit $x \in f^{-1}\,(Ker\,(g))$ quelconque.
(j) Soit $x' \in Ker\,(g \circ f)$ quelconque.

2. *Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Alors* $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

Démonstration :

(a) Alors $\sup B$ est un majorant de A et de B, donc de $A \cup B$.
(b) Comme $A \subset A \cup B$, $\sup A \cup B$ est un majorant de A.
(c) De même, $\sup B \leq \sup A \cup B$.
(d) Donc $\sup(A \cup B) \leq \sup B = \max(\sup A, \sup B)$.
(e) En conséquence, $\max(\sup A, \sup B) \leq \sup A \cup B$.
(f) Montrons $\sup(A \cup B) \geq \max(\sup A, \sup B)$ et $\sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B)$.
(g) On en déduit $\sup A \leq \sup A \cup B$.
(h) On peut supposer par exemple $\sup A \leq \sup B$.

Exercice 2. Dans la démonstration ci-dessous, indiquer

- les erreurs de raisonnement
- les étapes du raisonnement correctes
- les étapes manquantes
- les défauts de rédaction

Ecrire ensuite une démonstration correcte du point de vue du raisonnement et de la rédaction.

Soit $(u_n, n \in \mathbb{N})$ *une suite de réels telle que*

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}.$$

Alors

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{u_n} = 2$$

1 **Démonstration :** `On sait que`

2
$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq n_0)\left(\left|u_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon\right)$$

3 $\Longrightarrow$ `pour` $n \geq n_0$`,`

4
$$\left|\frac{\frac{1}{2} - u_n}{\frac{u_n}{2}}\right| < \frac{2\varepsilon}{|u_n|}$$

5 `Comme` $u_n \to \frac{1}{2}$`, alors` $|u_n| < 2$`, donc`

6
$$\frac{2\varepsilon}{|u_n|} < \varepsilon$$

7 `On a donc montré`

8
$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq n_0)\left(\left|\frac{1}{u_n} - 2\right| < \varepsilon\right)$$

Exercice 3. Soient A et B deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$, tels que, quels que soient $x \in A$ et $y \in B$, $x \leq y$. Montrer, en attachant le plus grand soin à la rédaction, que $\sup A$ et $\inf B$ existent dans $\mathbb{R}$, et qu'ils vérifient $\sup A \leq \inf B$.

Exercice 4. Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$, et x_0 et l deux réels. On rappelle que par définition

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta > 0)\,(\forall x \in \mathbb{R})\,(|x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

Démontrer, en attachant le plus grand soin à la rédaction, l'équivalence suivante :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow (\forall \varepsilon \in]0,1[)\,(\exists \eta \in]0,1[)\,(\forall x \in \mathbb{R})\,(|x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$