

Examen de Méthodologie Mathématique

Judi 11 septembre 2003 9h30-11h30

Les documents, calculatrices, et téléphones portables ne sont pas autorisés
Attention : rédiger les solutions des différents exercices sur des feuilles séparées

Exercice 1. Remettre dans l'ordre la démonstration suivante :

Soit f une fonction positive et continue sur \mathbb{R}_+ , qui tend vers 0 en $+\infty$.
Montrer qu'il existe $c \geq 0$ tel que $f(c) = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} f(x)$.

Démonstration :

1. Alors, d'après l'hypothèse, il existe $P \geq 0$ tel que

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+) (x > P \implies f(x) < \delta')$$

2. Comme f est continue sur $[0, P]$, f y atteint son maximum. Il existe donc $c \in [0, P]$ tel que

$$f(c) = \sup_{x \in [0, P]} f(x) = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} f(x)$$

3. Donc

$$\sup_{x > P} f(x) \leq \delta' < \delta.$$

4. On en déduit

$$\delta = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} f(x) = \max \left(\sup_{x \in [0, P]} f(x), \sup_{x > P} f(x) \right) = \sup_{x \in [0, P]} f(x)$$

5. Si $\delta = 0$, alors f est la fonction nulle, et toute valeur positive convient pour c .

6. Soit $\delta = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} f(x) \in [0, +\infty[$.

7. Soit $\delta' \in]0, \delta[$.

8. Supposons $\delta > 0$.

Exercice 2. Soient $k, l \in \mathbb{N}^*$ quelconques. Montrer que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(lx) dx = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En déduire

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \cos(kx) \right)^2 dx = \sum_{k=1}^n \alpha_k^2$$

Exercice 3. On considère l'ensemble C des chatons, et les prédicats suivants :

$M(x)$ = " x est moustachu "

$P(x)$ = " x aime le poisson "

$S(x)$ = " x a peur des souris "

Transcrire, en utilisant les symboles ci-dessus, les phrases suivantes dans la notation du calcul des prédicats (ou langage formel), et en restant le plus proche possible de la syntaxe initiale :

1. Aucun chaton qui aime le poisson n'a peur des souris.
2. Les chatons moustachus aiment toujours le poisson.
3. Il est faux que tous les chatons qui aiment le poisson soient moustachus.
4. Les chatons sont moustachus ou ont peur des souris.
5. Les chatons qui ont peur des souris ne sont pas moustachus.

En utilisant le calcul des prédicats, montrer que si l'on suppose vraies les phrases 1, 2 et 3, alors la phrase 4 est fausse et la phrase 5 est vraie.

Exercice 4. Soient A et B deux sous-ensembles majorés de \mathbb{R} . Montrer, en attachant le plus grand soin à la rédaction, que $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$