Université de Paris 5 – René Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Corrigé du partiel de Méthodologie Mathématique

Jeudi 18 mars 2004

Exercice 1. On considère l'application $f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$. Pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}$, on pose

$f(A) = \{f(x)/x \in A\} = \{y \in \mathbb{R}/(\exists x \in A)(f(x) = y)\}$ et $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in A\}$.

1. Déterminer les ensembles suivants : $f([-3,-1])$, $f([-2,1])$, $f([-3,-1] \cup [-2,1])$ et $f([-3,-1] \cap [-2,1])$. Les comparer.
2. Mêmes questions avec les ensembles : $f^{-1}(]-\infty,2])$, $f^{-1}([1,+\infty[)$, $f^{-1}(]-\infty,2] \cup [1,+\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty,2] \cap [1,+\infty[)$.

Corrigé.

1. – *L'application f est décroissante et bijective de $\mathbb{R}_-$ sur $\mathbb{R}_+$. L'image de l'ensemble $[-3,-1]$ est donc l'ensemble*

$$f([-3,-1]) = [f(-1), f(-3)] = [1,9].$$

– *Si A et B sont deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$, on vérifie facilement que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. En effet, soit $y \in \mathbb{R}$ quelconque ; alors*

$$\begin{array}{rcl} y \in f(A \cup B) & \Longleftrightarrow & (\exists x \in A \cup B)\,(y = f(x)) \\ & \Longleftrightarrow & ((\exists x \in A)\,(y = f(x)) \;\; \textit{ou} \;\; (\exists x \in B)\,(y = f(x))) \\ & \Longleftrightarrow & (y \in f(A) \;\textit{ou}\; y \in f(B)) \\ & \Longleftrightarrow & y \in f(A) \cup f(B). \end{array}$$

On a donc $f([-2,1]) = f([-2,0]) \cup f([0,1])$. Or f est décroissante et bijective de $\mathbb{R}_-$ sur $\mathbb{R}_+$. L'image de l'ensemble $[-2,0]$ est donc l'ensemble $f([-2,0]) = [f(0), f(-2)] = [0,4]$. Et f est croissante et bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. L'image de l'ensemble $[0,1]$ est donc l'ensemble $f([0,1]) = [f(0), f(1)] = [0,1]$. On en déduit

$$f([-2,1]) = [0,4] \cup [0,1] = [0,4]$$

– *Pour les mêmes raisons, on a*

$$f([-3,-1] \cup [-2,1]) = f([-3,-1]) \cup f([-2,1]) = [1,9] \cup [0,4] = [0,9]$$

– *On a $[-3,-1] \cap [-2,1] = [-2,-1]$. Pour les mêmes raisons que précédemment, l'image de l'ensemble $[-2,-1]$ est l'ensemble $f([-2,-1]) = [f(-1), f(-2)] = [1,4]$. En résumé, on a donc*

$$f([-3,-1] \cap [-2,1]) = [1,4]$$

– *Il reste à comparer* $f([-3,-1]\cap[-2,1])$ *avec* $f([-3,-1])$ *et* $f([-2,1])$. *On remarque*

$$f([-3,-1]\cap[-2,1]) = f([-3,-1])\cap f([-2,1])$$

En règle générale, on a simplement l'inclusion $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

2. –

$$\begin{aligned} f^{-1}(]-\infty,2]) &= \{x\in\mathbb{R}/f(x)\in\,]-\infty,2]\} \\ &= \left\{x\in\mathbb{R}/x^2\le 2\right\} \\ &= \left\{x\in\mathbb{R}/|x|\le\sqrt{2}\right\} \\ &= \left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right] \end{aligned}$$

–

$$\begin{aligned} f^{-1}([1,+\infty[) &= \{x\in\mathbb{R}/f(x)\in[1,+\infty[\} \\ &= \left\{x\in\mathbb{R}/x^2\ge 1\right\} \\ &= \{x\in\mathbb{R}/|x|\ge 1\} \\ &= \,]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[\end{aligned}$$

–

$$\begin{aligned} f^{-1}(]-\infty,2]\cup[1,+\infty[) &= f^{-1}(\mathbb{R}) \\ &= \{x\in\mathbb{R}/f(x)\in\mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

–

$$\begin{aligned} f^{-1}(]-\infty,2]\cap[1,+\infty[) &= f^{-1}([1,2]) \\ &= \{x\in\mathbb{R}/f(x)\in[1,2]\} \\ &= \left\{x\in\mathbb{R}/1\le x^2\le 2\right\} \\ &= \left\{x\in\mathbb{R}/1\le|x|\le\sqrt{2}\right\} \\ &= \left[-\sqrt{2},-1\right]\cup\left[1,\sqrt{2}\right] \end{aligned}$$

– *On constate facilement que*

$$\begin{aligned} f^{-1}(]-\infty,2]\cup[1,+\infty[) &= f^{-1}(]-\infty,2])\cup f^{-1}([1,+\infty[) \\ f^{-1}(]-\infty,2]\cap[1,+\infty[) &= f^{-1}(]-\infty,2])\cap f^{-1}([1,+\infty[) \end{aligned}$$

En règle générale, on a bien $f^{-1}(A\cap B) = f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$ *et* $f^{-1}(A\cup B) = f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$.

Exercice 2.

- Le roi : Si Don Rodrigue a tué ton père, c'est qu'il avait bu ou qu'il faisait nuit. S'il faisait nuit, alors, s'il avait bu, il devait chanter. Or il ne sait pas chanter. Donc il n'a pas tué ton père.
- Chimène : Votre Majesté déraisonne.

Formaliser chaque phrase du discours du roi à l'aide des connecteurs logiques. Montrer que des trois premières on ne peut déduire la dernière, et que Rodrigue peut avoir tué le père de Chimène.

Corrigé. *On considère les quatre assertions suivantes :*

- T *: Rodrigue a tué le père de Chimène.*
- B *: Rodrigue avait bu.*
- N *: Il faisait nuit.*
- C *: Rodrigue chantait.*

On peut alors retranscrire les quatre phrases du discours royal sous la forme :

1. $T \Rightarrow (B \,\mathrm{ou}\, N)$
2. $N \Rightarrow (B \Rightarrow C)$
3. $\mathrm{non}\, C$
4. $\mathrm{non}\, T$

Supposons T *vrai,* B *faux,* N *vrai et* C *faux. Alors*

1. "$B \,\mathrm{ou}\, N$" *est vrai, donc* "$T \Rightarrow (B \,\mathrm{ou}\, N)$" *est vrai (si la conclusion d'une implication est vraie, l'implication est vraie).*
2. "$B \Rightarrow C$" *est vrai (si l'hypothèse d'une implication est fausse, l'implication est vraie) ; donc* "$N \Rightarrow (B \Rightarrow C)$" *est vrai (si la conclusion etc.).*
3. "$\mathrm{non}\, C$" *est vrai.*
4. "$\mathrm{non}\, T$" *est faux*

Cet exemple montre que les trois premières phrases du roi peuvent être vraies sans que la dernière le soit, et qu'il n'y a donc pas d'implication de celle-ci par celles-là : on a

$$(T \Rightarrow (B \,\mathrm{ou}\, N)) \text{ et } (N \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \text{ et } (\,\mathrm{non}\, C) \text{ et non } (\,\mathrm{non}\, T)$$

qui est équivalent à

$$\mathrm{non}\left(\Big((T \Rightarrow (B \,\mathrm{ou}\, N)) \text{ et } (N \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \text{ et non}\, C\Big) \Rightarrow \mathrm{non}\, T\right).$$

Exercice 3. Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$, et x_0 et l deux réels. Que peut-on dire de f quand la propriété suivante est vérifiée ?

1. $(\forall \varepsilon > 0)\,(\forall x \in \mathbb{R})\,(|x - x_0| < 1 \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$.
2. $(\exists \eta > 0)\,(\forall x \in \mathbb{R})\,(|x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < 1)$.
3. $(\exists \varepsilon > 0)\,(\forall \eta > 0)\,(\forall x \in \mathbb{R})\,(|x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$.

Corrigé.

1. *Le fonction f vérifie la première propriété si et seulement elle est constante sur l'intervalle $]x_0 - 1, x_0 + 1[$, de valeur l. En effet :*
   - *S'il existe $x \in]x_0 - 1, x_0 + 1[$ tel que $f(x) \neq l$, alors, en posant $\varepsilon = |f(x) - l|$, on a $\varepsilon > 0$, $|x - x_0| < 1$ et $|f(x) - l| \geq \varepsilon$. On a ainsi montré :*

     $$(\exists x \in]x_0 - 1, x_0 + 1[)\,(f(x) \neq l) \Longrightarrow (\exists \varepsilon > 0)\,(\exists x \in \mathbb{R})\,(|x - x_0| < 1 \,\text{et}\, |f(x) - l| \geq \varepsilon)\,.$$

     En en prenant la contraposée, on a donc montré :

     $$(\forall \varepsilon > 0)\,(\forall x \in \mathbb{R})\,(|x - x_0| < 1 \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon) \Longrightarrow (\forall x \in]x_0 - 1, x_0 + 1[)\,(f(x) = l)\,.$$

   - *Si f est constante sur l'intervalle $]x_0 - 1, x_0 + 1[$, de valeur l, alors, quels que soient $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - x_0| < 1$, on a $|f(x) - l| = |l - l| = 0 < \varepsilon$. Ce qui prouve la réciproque :*

     $$(\forall x \in]x_0 - 1, x_0 + 1[)\,(f(x) = l) \Longrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\,(\forall x \in \mathbb{R})\,(|x - x_0| < 1 \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)\,.$$

2. *La fonction f vérifie la deuxième propriété si et seulement s'il existe un voisinage de x_0 sur lequel f prend toutes ses valeurs entre $l - 1$ et $l + 1$.*
3. *La fonction f vérifie la troisième propriété si et seulement si elle est bornée sur $\mathbb{R}$. En effet :*
   - *Si f vérifie la troisième propriété, il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

     $$(\forall \eta > 0)\,(\forall x \in \mathbb{R})\,(|x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

     On pose $M = |l| + \varepsilon$. Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque. On choisit $\eta = |x - x_0| + 1$. On a donc $\eta > 0$ et $|x - x_0| < \eta$. On en déduit $|f(x) - l| < \varepsilon$. Or $|f(x)| \leq |f(x) - l| + |l| < \varepsilon + l = M$. On a donc montré :

     $$(\exists \varepsilon > 0)\,(\forall \eta > 0)\,(\forall x \in \mathbb{R})\,(|x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon) \Longrightarrow (\exists M \geq 0)\,(\forall x \in \mathbb{R})\,(|f(x)| \leq M)\,.$$

   - *Réciproquement, si f est bornée par M sur $\mathbb{R}$, on pose $\varepsilon = M + |l| + 1$. Alors, quels que soient $\eta > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ tels que $|x - x_0| < \eta$, on a $|f(x) - l| \leq |f(x)| + |l| \leq M + |l| < \varepsilon$. On a donc montré :*

     $$(\exists M \geq 0)\,(\forall x \in \mathbb{R})\,(|f(x)| \leq M) \Longrightarrow (\exists \varepsilon > 0)\,(\forall \eta > 0)\,(\forall x \in \mathbb{R})\,(|x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)\,.$$

Exercice 4. Avec un jeu de 32 cartes, combien peut-on faire de mains de 5 cartes

1. contenant exactement trois as ?
2. contenant exactement trois as et un seul trêfle ?

Rappel : un jeu de de 32 cartes est composé 8 cartes (7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As) de chaque couleur (pique, cœur, carreau, trêfle).

Corrigé.

1. *On répartit le jeu en deux paquets disjoints, le premier contenant les quatre As, le second les vingt-huit autres cartes.*
   - *Dans le premier paquet, on tire trois cartes. Il s'agit d'un tirage sans remise où l'ordre n'est pas pris en compte, le nombre de possibilités est donc déterminé par une combinaison et vaut* $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   - *Dans le second paquet, on tire deux cartes : le nombre de possibilités est* $\begin{pmatrix} 28 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   On obtient ainsi toutes les mains possibles de cinq cartes contenant trois As. Comme les tirages sont indépendants, autrement dit effectués dans des ensembles disjoints, le nombre total de possibilités est déterminé par le produit $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 28 \\ 2 \end{pmatrix}$.
2. *On dénombre successivement les mains contenant l'As de trèfle et celles ne le contenant pas :*
   (a) *Mains contenant l'As de trèfle. On répartit le jeu en quatre paquets disjoints, le premier contenant l'As de trèfle, le second les trois autres As, le troisième les sept autres trèfles et dans le quatrième les vingt-et-une cartes restantes. Dans le premier paquet, on tire une carte, dans le second deux, dans le troisième aucune, et dans le quatrième deux. Il y a une (!) possibilité pour le premier tirage,* $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ *pour le second, une (!) pour le troisième, et* $\begin{pmatrix} 21 \\ 2 \end{pmatrix}$ *pour le quatrième. Les tirages étant indépendants, le nombre total de possibilités est* $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 21 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   (b) *Mains ne contenant pas l'As de trèfle. On répartit le jeu en quatre paquets disjoints, le premier contenant l'As de trèfle, le second les trois autres As, le troisième les sept autres trèfles et dans le quatrième les vingt-et-une cartes restantes. Dans le premier paquet, on ne tire aucune carte, dans le second on en tire trois, dans le troisième une, et dans le quatrième deux. Il y a une (!) possibilité pour le premier tirage, une (!) possibilité pour le deuxième,* $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ *pour le troisième, et* $\begin{pmatrix} 21 \\ 1 \end{pmatrix}$ *pour le quatrième. Les tirages étant indépendants, le nombre total de possibilités est* $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 21 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Le nombre total de mains est la somme du nombre de celles qui contiennent l'As de trèfle et de celles qui ne le contiennent pas, car elles forment une partition des mains possibles. Ce nombre est donc

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 21 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 21 \\ 1 \end{pmatrix}.$$