

Partiel de Méthodologie Mathématique

Jeudi 18 mars 8h-10h

Le sujet comporte une page

Les documents, calculatrices, et téléphones portables ne sont pas autorisés

Exercice 1. On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Pour tout sous-ensemble A de \mathbb{R} , on pose

$$x \mapsto x^2$$

$$f(A) = \{f(x)/x \in A\} = \{y \in \mathbb{R}/(\exists x \in A)(f(x) = y)\} \text{ et } f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in A\}.$$

1. Déterminer les ensembles suivants : $f([-3, -1])$, $f([-2, 1])$, $f([-3, -1] \cup [-2, 1])$ et $f([-3, -1] \cap [-2, 1])$. Les comparer.
2. Mêmes questions avec les ensembles : $f^{-1}]-\infty, 2]$, $f^{-1} ([1, +\infty[$, $f^{-1}]-\infty, 2] \cup [1, +\infty[$ et $f^{-1}]-\infty, 2] \cap [1, +\infty[$.

Exercice 2.

- Le roi : Si Don Rodrigue a tué ton père, c'est qu'il avait bu ou qu'il faisait nuit. S'il faisait nuit, alors, s'il avait bu, il devait chanter. Or il ne sait pas chanter. Donc il n'a pas tué ton père.
- Chimène : Votre Majesté déraisonne.

Formaliser chaque phrase du discours du roi à l'aide des connecteurs logiques. Montrer que des trois premières on ne peut déduire la dernière, et que Rodrigue peut avoir tué le père de Chimène.

Exercice 3. Soit f une fonction réelle définie sur \mathbb{R} , et x_0 et l deux réels. Que peut-on dire de f quand la propriété suivante est vérifiée ?

1. $(\forall \varepsilon > 0) (\forall x \in \mathbb{R}) (|x - x_0| < 1 \implies |f(x) - l| < \varepsilon)$.
2. $(\exists \eta > 0) (\forall x \in \mathbb{R}) (|x - x_0| < \eta \implies |f(x) - l| < 1)$.
3. $(\exists \varepsilon > 0) (\forall \eta > 0) (\forall x \in \mathbb{R}) (|x - x_0| < \eta \implies |f(x) - l| < \varepsilon)$.

Exercice 4. Avec un jeu de 32 cartes, combien peut-on faire de mains de 5 cartes

1. contenant exactement trois as ?
2. contenant exactement trois as et un seul trèfle ?

Rappel : un jeu de 32 cartes est composé 8 cartes (7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As) de chaque couleur (pique, cœur, carreau, trèfle).