UNIVERSITE RENE DESCARTES

U.F.R. de MATHEMATIQUES
et INFORMATIQUE

DEUG MASS et MIAS
Corrigé de l'Examen U5

du 10 mai 2004

Exercice 1

L'ordre correcte est 3, 6, 1, 8, 5, 2, 7, 4.

Exercice 2

Soit

$$\mathcal{P}(n) : \left| \prod_{i=1}^{n} u_i - \prod_{i=1}^{n} v_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |u_i - v_i|.$$

1. $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque $|u_1 - v_1| \leq |u_1 - v_1|$.
2. Considérons

$$\begin{aligned} \left| \prod_{i=1}^{n+1} u_i - \prod_{i=1}^{n+1} v_i \right| &= \left| \left(\prod_{i=1}^{n} u_i - \prod_{i=1}^{n} v_i \right) u_{n+1} + \left(\prod_{i=1}^{n} v_i \right) (u_{n+1} - v_{n+1}) \right| \\ &\leq \left| \prod_{i=1}^{n} u_i - \prod_{i=1}^{n} v_i \right| |u_{n+1}| + \left| \prod_{i=1}^{n} v_i \right| |u_{n+1} - v_{n+1}| \end{aligned}$$

Or les u_i et les v_i sont de module inférieur ou égal à 1 donc :

$$\left| \prod_{i=1}^{n+1} u_i - \prod_{i=1}^{n+1} v_i \right| \leq \left| \prod_{i=1}^{n} u_i - \prod_{i=1}^{n} v_i \right| + |u_{n+1} - v_{n+1}|$$

On utilise alors l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$ et on obtient le résultat voulu.

Exercice 3

1. On fait le changement d'indice $k = m + 1$ et on utilise la formule du binôme :

$$S_{n+1,p+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k^{p+1} = \sum_{m=0}^{n} (m+1)^{p+1} = \sum_{m=0}^{n} \sum_{l=0}^{p+1} \binom{p+1}{l} m^l = \sum_{l=0}^{p+1} \binom{p+1}{l} \left(\sum_{m=0}^{n} m^l \right)$$

où l'on reconnait $\sum_{m=0}^{n} m^l = \sum_{m=1}^{n} m^l = S_{n,l}$ puisque $0^l = 0$ si $l \in \mathbb{N}^*$. Par contre, si $l = 0$, $0^0 = 1$ et donc $\sum_{m=0}^{n} m^0 = 1 + \sum_{m=1}^{n} m^0$ n'est pas égal à $S_{n,0}$ mais à $S_{n,0} + 1$. D'où :

$$S_{n+1,p+1} = 1 + \sum_{l=0}^{p+1} \binom{p+1}{l} S_{n,l}$$

2. $$S_{n+1,p+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k^{p+1} = \sum_{k=1}^{n} k^{p+1} + (n+1)^{p+1} = S_{n,p+1} + (n+1)^{p+1}$$

3. On déduit des deux questions précédentes que

$$S_{n+1,p+1} = S_{n,p+1} + (n+1)^{p+1} = 1 + \sum_{l=0}^{p+1} \binom{p+1}{l} S_{n,l} = 1 + \sum_{l=0}^{p} \binom{p+1}{l} S_{n,l} + S_{n,p+1}$$

et donc après simplification :

$$(n+1)^{p+1} = 1 + \sum_{l=0}^{p} \binom{p+1}{l} S_{n,l}$$

4. $S_{n,0} = n$ est évident. Ensuite, on applique la relation précédente pour $p = 1$, $p = 2$ et $p = 3$:

$$\begin{cases} (n+1)^2 = 1 + S_{n,0} + 2S_{n,1} = 1 + n + 2S_{n,1} \\ (n+1)^3 = 1 + S_{n,0} + 3S_{n,1} + 3S_{n,2} \\ (n+1)^4 = 1 + S_{n,0} + 4S_{n,1} + 6S_{n,2} + 4S_{n,3} \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} S_{n,1} = \dfrac{(n+1)^2 - 1 - n}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2} \\ S_{n,2} = \dfrac{(n+1)^3 - 1 - n - 3n(n+1)/2}{3} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ S_{n,3} = \dfrac{(n+1)^4 - 1 - n - 2n(n+1) - n(n+1)(2n+1)}{4} = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} \end{cases}$$

Exercice 4

1. Il y a beaucoup de moyens d'obtenir le résultat. En voici un : Puisque α/π n'est pas entier, $\sin(\alpha) \neq 0$ donc

$$\cos(n\alpha) = \frac{\sin((n+1)\alpha) - \sin(n\alpha)\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

Donc si $\lim_{n\to+\infty} \sin(n\alpha) = l$ alors $\lim_{n\to+\infty} \sin((n+1)\alpha) = l$ puisqu'il s'agit d'une suite extraite et donc par opération sur les limites : $\lim_{n\to+\infty} \cos(n\alpha)$ existe et vaut

$$l\,\frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

2. De la même façon,

$$\sin(n\alpha) = \frac{\cos(n\alpha)\cos(\alpha) - \cos((n+1)\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

et donc si $\lim_{n\to+\infty} \cos(n\alpha) = l'$ alors $\lim_{n\to+\infty} \sin(n\alpha)$ existe et vaut

$$l'\,\frac{\cos(\alpha)-1}{\sin(\alpha)}$$

3. Supposons que les deux limites existent : $\lim_{n\to+\infty} \sin(n\alpha) = l$ et $\lim_{n\to+\infty} \cos(n\alpha) = l'$ d'où

$$l' = l\,\frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \text{ et } l = l'\,\frac{\cos(\alpha)-1}{\sin(\alpha)}$$

On en déduit

$$l' = l\,\frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = -l'\left(\frac{\cos(\alpha)-1}{\sin(\alpha)}\right)^2$$

ce qui n'est possible que si $l' = 0$ et alors $l = 0$ mais c'est impossible puisque $\sin^2(n\alpha) + \cos^2(n\alpha) = 1$ et que donc en passant à la limite $l^2 + l'^2 = 1$. D'où la contradiction recherchée.

4. On déduit de ce qui précède que l'on peut montrer par l'absurde que si α un réel tel que α/π ne soit pas un entier, alors les limites $\lim_{n\to+\infty} \sin(n\alpha)$ et $\lim_{n\to+\infty} \cos(n\alpha)$ n'existent pas. En effet si l'une d'entre elle existait alors d'après les questions 1. et 2., elles existeraient toutes les deux et on aboutit à une contradiction d'après la question 3.