

Exercice 1

Remettez de l'ordre dans la démonstration du résultat suivant.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels telle que la suite $(u_{n+1} - u_n)$ tende vers 0, alors la suite (u_n/n) tend vers 0.

1. sachant que, quels que soient les réels a et b , $|a| - |b| \leq |a - b|$,
2. or, il existe $n_1 \geq n_0$ tel que pour tout $n \geq n_1$, $\frac{|u_{n_0}|}{n} < \frac{\epsilon}{2}$.
3. soit $\epsilon > 0$ quelconque.
4. comme cela est vrai quelque soit $\epsilon > 0$, on a bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 0$.
5. on en déduit $|u_n| < |u_{n_0}| + (n - n_0)\frac{\epsilon}{2}$, pour tout entier $n \geq n_0$.
6. il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_{n+1} - u_n| < \frac{\epsilon}{2}$.
7. donc, pour tout $n \geq n_1$, $\frac{|u_n|}{n} < \frac{\epsilon}{2} + (1 - \frac{n_0}{n})\frac{\epsilon}{2} < \epsilon$.
8. on a, pour tout entier $n \geq n_0$, $|u_{n+1}| < |u_n| + \frac{\epsilon}{2}$.

Exercice 2

Soient $(u_k, k \in \mathbb{N}^*)$ et $(v_k, k \in \mathbb{N}^*)$ deux suites de nombres complexes dont le module est inférieur à 1. Montrez par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\left| \prod_{i=1}^n u_i - \prod_{i=1}^n v_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |u_i - v_i|.$$

(Il peut être utile de commencer par étudier la propriété pour $n = 2$.)

Exercice 3

Soient n et p deux entiers tels que $n \geq 1$ et $p \geq 0$. On pose

$$S_{n,p} = \sum_{k=1}^n k^p$$

1. Appliquer la formule du binôme à $S_{n+1,p+1}$ après avoir fait apparaître $(k+1)^{p+1}$ dans la somme par changement d'indice.
2. Montrer que $S_{n+1,p+1} = S_{n,p+1} + (n+1)^{p+1}$.
3. Dédire des deux questions précédentes que

$$(n+1)^{p+1} = \sum_{l=0}^p \binom{p+1}{l} S_{n,l}$$

4. Calculer $S_{n,0}$, $S_{n,1}$, $S_{n,2}$ et $S_{n,3}$

Exercice 4

On rappelle les formules suivantes :

$$\cos((n+1)\alpha) = \cos(n\alpha)\cos(\alpha) - \sin(n\alpha)\sin(\alpha)$$

$$\sin((n+1)\alpha) = \sin(n\alpha)\cos(\alpha) + \cos(n\alpha)\sin(\alpha)$$

$$\sin(2n\alpha) = 2\cos(n\alpha)\sin(n\alpha)$$

$$\cos(2n\alpha) = \cos^2(n\alpha) - \sin^2(n\alpha)$$

Soit α un réel tel que α/π ne soit pas un entier.

1. Montrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(n\alpha)$ existe alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(n\alpha)$ existe.
2. Montrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(n\alpha)$ existe alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(n\alpha)$ existe.
3. Montrer que l'existence des deux limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(n\alpha)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(n\alpha)$ conduit à une contradiction.
4. Que pouvez-vous en déduire ?