Université René Descartes – Paris 5
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence 3e année, 2006–2007

Optimisation

Corrigé de l'examen du 16 janvier 2007

Problème :

1. On pose $\phi(t) = f(X(t))$, alors $\phi \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\phi(0) = f(a)$ et ϕ admet un extremum en $t = 0$, d'où $\phi'(0) = 0$. Or $\phi'(t) = Df(X(t))\,X'(t)$ où $Df(X(t)) \in \mathcal{M}(1, n)$ est la matrice jacobienne de f au point $X(t)$ et $X'(t) \in \mathcal{M}(n, 1)$ le vecteur tangent à la courbe paramétrée X en t.
   Finalement, $0 = Df(X(0))\,X'(0) = \nabla f(a)^t\,X'(0) =< \nabla f(a), X'(0) >$.

   Note : Si l'ensemble $\mathcal{A}$ est un <u>ouvert</u>, on peut déduire de ce résultat que $\nabla f(a) = 0$; mais en général $\nabla f(a)$ et $X'(0)$ sont des vecteurs <u>non nuls</u> !

2. On note $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de la matrice Q, on peut écrire, en utilisant respectivement l'encadrement d'une forme quadratique par ses valeurs propres et l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire :
$$f(x) \geq \lambda_1 \|x\|_2^2 - \|b\|_2\,\|x\|_2 + c \ \text{ d'où } \lim_{\|x\|_2 \to +\infty} f(x) = +\infty\,.$$

3. On veut montrer qu'il existe un minimum global de f sur $\mathbb{R}^n$: $\exists x^* \in \mathbb{R}^n, f(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$.

   On a $f(0) = c \in \mathbb{R}$, or comme f tend vers l'infini, il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout x, $\|x\|_2 > M$, on a $f(x) > c$. Sur le fermé, borné $\overline{\mathcal{B}_2}(0, M)$, la fonction continue f atteint son minimum en au moins un point $x^* \in \overline{\mathcal{B}_2}(0, M)$: $m = f(x^*) = \min_{x \in \overline{\mathcal{B}_2}(0,M)} f(x)$.
   Comme $m \leq f(0) = c$, on en déduit que $m = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = f(x^*)$.

4. Soit $a \in \mathcal{A}$ un extremum local de f sur $\mathcal{A}$, d'après la question 1, $\nabla f(a)$ est perpendiculaire à toute courbe incluse dans $\mathcal{A}$ et passant par a. $\mathcal{A}$ étant un cercle, on en déduit que $\nabla f(a)$ est perpendiculaire au cercle en a.
   Or une normale au cercle au point $a \in \mathcal{A}$ est donnée par a ; on en déduit que $\nabla f(a)$ est colinéaire à a. Finalement, on peut écrire les équations vérifiées par un extremum local $a \in \mathcal{A}$ de f sur $\mathcal{A}$:
$$\nabla f(a) = \lambda\, a \ \ , \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad a \in \mathcal{A}\,.$$

5. Comme f admet un minimum sur $\mathbb{R}^n$, on en déduit que f admet un minimum sur $\mathcal{A}$, le fait que $\mathcal{A}$ est un compact (fermé, borné) permet de conclure la même chose.
   Pour $a = (a_1, a_2)$, $f(a) = \frac{1}{2}\,a^t\,Q\,a = \frac{1}{2}\,(2a_1^2 + 2a_2^2 + 2a_1a_2) = a_1^2 + a_2^2 + a_1a_2\,,$
$$\nabla f(a) = Qa = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = (Q - \lambda\, I_2)a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   et $a_1^2 + a_2^2 = 1$ car $a \in \mathcal{A}$.

Le système linéaire $(Q - \lambda I_2)a = 0$ a une solution unique, $a = 0$, si $det(Q - \lambda I_2) \neq 0$, or $a = 0$ n'est pas admissible car $0 \notin \mathcal{A}$.
Donc $0 = det(Q - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)$.

Si $\lambda = 1$, $a_1 + a_2 = 0$ donc $a_1 = -a_2$, or $a_1^2 + a_2^2 = 1$,
d'où les points $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ et $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ et $f(\pm\sqrt{2}/2, \mp\sqrt{2}/2) = 1/2$

Si $\lambda = 3$, $a_1 = a_2$ avec $a_1^2 + a_2^2 = 1$,
on obtient les points $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ et $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ et $f(\pm\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/2) = 3/2$.

Conclusion, le minimum de f sur $\mathcal{A}$ est atteint en $(\pm\sqrt{2}/2, \mp\sqrt{2}/2)$ et vaut $1/2$.
(Note : le maximum de f sur $\mathcal{A}$ est atteint en $(\pm\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/2)$ et vaut $3/2$)

Exercice

- On commence par déterminer les points critiques de f qui vérifient $\nabla f(x, y) = 0$, c-à-d :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x_2 + 3y^2 - 15 \\ 6xy - 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & = & 5 \\ xy & = & 2 \end{array} \right.$$

La seconde équation entraîne que x et y sont non nuls et $y = 2/x$,
la première équation donne alors $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$, d'où $x^2 = \frac{1}{2}\left(5 \pm \sqrt{5^2 - 16}\right)$.
On en déduit que $x = \pm 2$ ou $x = \pm 1$.
On trouve donc quatre points critiques : $(1, 2)$, $(-1, -2)$, $(2, 1)$ et $(-2, -1)$.

- Pour étudier la nature des points critiques on détermine la matrice hessienne :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}.$$

$H_f(1,2) = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$
matrice d'une forme quadratique qui change de signe (v.p. -6 et 18), c'est un point selle.

$H_f(-1,-2) = -\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$
matrice d'une forme quadratique qui change de signe (v.p. 6 et -18), c'est un point selle.

$H_f(2,1) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$
matrice d'une forme quadratique définie positive (v.p. 6 et 18), d'où minimum local en $(2, 1)$.

$H_f(-2,-1) = -\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$
matrice d'une forme quadratique définie négative (v.p. -6 et -18), d'où maximum local en $(-2, -1)$.