Propriété de régularité des contours d'une image segmentée.

Françoise Dibos,Georges Koepfler.
CEREMADE, Université de Paris IX-Dauphine
75775 Paris cedex 16 (France)
FAX: (1) 47.55.48.57

23 janvier 1998

Résumé – *Il est bien connu que la rectifiabilité d'un ensemble n'est pas préservée par passage à la limite pour la distance de Hausdorff. Nous introduisons une propriété, dite propriété des projections, qui permet d'assurer qu'un ensemble est rectifiable. De plus, la limite, au sens de la distance de Hausdorff, d'une suite* (K_n) *de compacts rectifiables, vérifiant uniformément la propriété des projections, est rectifiable. Nous montrons que l'ensemble des contours* K*, obtenu en minimisant la fonctionnelle de Mumford et Shah*

$$I(u,K) = \int_{\Omega\backslash K} |\nabla u|^2 + \int_\Omega (u-g)^2 + \mathcal{H}^1(K), \tag{1}$$

vérifie la propriété des projections.

Regularity property of the bounderies of a segmented picture.

Abstract – *It is well known that the rectifiability of a set is not preserved by taking the limit for the Hausdorff distance. We introduce a property, called property of projections, which implies the rectifiability of a set. Moreover, given a sequence* (K_n) *of compact and rectifiable sets which satisfy uniformly this property with respect to* n*, the limit in the Hausdorff sense of this sequence is rectifiable. We show that the segmentation* K*, obtained by minimizing the functional of Mumford and Shah*

$$I(u,K) = \int_{\Omega\backslash K} |\nabla u|^2 + \int_\Omega (u-g)^2 + \mathcal{H}^1(K),$$

verifies the property of projections.

Abridged English Version – To solve the image segmentation problem Mumford and Shah [MuSh] proposed to approximate the picture, a function of two variables, by a piecewise regular function. They measure how good this approximation fits, respectively how 'good' the segmentation is, with the functional

$$I(u,K) = \mu \int_\Omega (u-g)^2 \; + \; \int_{\Omega\backslash K} |\nabla u|^2 \; + \nu\,\mathcal{H}^1(K),$$

where g is the original picture, a bounded function on the open set Ω and $u \in H^1(\Omega\backslash K)$ is the approximation, regular on $\Omega\backslash K$. The set K, union of the frontiers of the 'homogeneous' areas, is compact and has Hausdorff length $\mathcal{H}^1(K)$. The constants μ and ν are real and positive.
The existence of a weak solution for the minimization of functional (1) has been proved by Ambrosio, DeGiorgi [AmDGi] and Carriero, DeGiorgi and Leaci [CaDGiLe]. Their results imply that K is an

$\mathcal{H}^1$-essential closed set. Dal Maso, Morel and Solimini show in [DMaMoSo] that K verifies the *concentration property*:
A Borel set $K \subset \overline{\Omega}$ verifies the concentration property in Ω if for every $\epsilon > 0$, there exists $\alpha = \alpha(\epsilon) > 0$ such that for all disc $D_r \subset \Omega$, of centre $x_0 \in K$, there exists a disc D included in D_r which verifies $diam(D) \geq \alpha \cdot diam(D_r)$ and $\mathcal{H}^1(D \cap K) \geq (1-\epsilon)diam(D)$.
If the compact sets K_n verify uniformly this property, then $\mathcal{H}^1(K) \leq \liminf \mathcal{H}^1(K_n)$, where K is the limit of the K_n for the Hausdorff distance $d_{\mathcal{H}^1}$.
In the same paper these authors show that a point (u, K), where I reaches it's minimum, is the limit of a sequence (u_n, K_n), K_n being the union of n Lipschitz curves and $K_n \xrightarrow{d_{\mathcal{H}^1}} K$.

We show that the concentration property does not preserve the rectifiability. To prove this, we construct a sequence $(K_n)_n$ of rectifiable sets which verifies uniformly the concentration property but does not verify the property we will introduce in definition 1. Moreover one can show that, for n big enough, replacing K_n by $\emptyset$ in a segmentation decreases the global energy of the Mumford and Shah functional, i.e. K_n can be 'eliminated'.
We show also that there exists a fractal set A , totally unrectifiable and of finite non-zero Hausdorff length, which verifies the concentration property. To construct this set we use iterated function systems (see [BaDe]).
The property we will introduce now, implies rectifiability and preserves it, when passing to the limit using the Hausdorff distance.

Definition 1 *A closed subset K of Ω, with $0 < \mathcal{H}^1(K) < \infty$, verifies the property of projections if there exists $\alpha > 0$ such that for every disc D_r, verifying $\mathcal{H}^1(K \cap D_{\frac{r}{4}}) \neq 0$, one has*

$$\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[: \mathcal{H}^1\left(p_\theta(K \cap D_r)\right) + \mathcal{H}^1\left(p_{\theta+\frac{\pi}{2}}(K \cap D_r)\right) \geq \alpha r.$$

Where p_θ denotes the orthogonal projection from $I\!R^2$ onto L_θ, the line through the origin making angle θ with some fixed axis.

Theorem 1 *If K verifies the property of projections then K is rectifiable.*

This means that $K = F \cup N$, where F is included in a countable union of Lipschitz curves and $\mathcal{H}^1(N) = 0$.

Theorem 2 *Let a sequence of compact sets K_n converge to K for $d_{\mathcal{H}^1}$, suppose that there exits $\alpha > 0$ such that for every disc D_r, verifying $\mathcal{H}^1(K_n \cap D_{\frac{r}{4}}) \neq 0$, one has*

$$\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[: \mathcal{H}^1\left(p_\theta(K_n \cap D_r)\right) + \mathcal{H}^1\left(p_{\theta+\frac{\pi}{2}}(K_n \cap D_r)\right) \geq \alpha r.$$

Then the set K verifies the property of projections with the same constant α.

Theorem 3 *Every segmentation minimizing the Mumford and Shah functional verifies the property of projections and is therefore rectifiable.*

Theorems 1 and 2 are easy to show. The proof of theorem 3 uses techniques introduced in [DMaMoSo] and is quite long. Let us just give a sketch of the proof.
We first show that if the sequence (u_n, K_n) converges to (u, K), K_n being the union of n Lipschitz curves, then there exists an absolute constant $\alpha_0 > 0$, independant of n, such that for every disc D_r, verifying $\mathcal{H}^1(K_n \cap D_r)$, one has

$$\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[: \mathcal{H}^1\left(p_\theta(K_n \cap D_r)\right) + \mathcal{H}^1\left(p_{\theta+\frac{\pi}{2}}(K_n \cap D_r)\right) \geq \alpha_0 r.$$

The sequence (K_n) verifies, uniformly with respect to n, the property of projections and we deduce the result using theorem 2.

1.Introduction. Pour résoudre le problème de segmentation d'images, Mumford et Shah [MuSh] ont proposé d'approximer l'image, fonction de deux variables, par une fonction plus simple, régulière par morceaux. La qualité de l'approximation, respectivement de la segmentation, est mesurée grâce à la fonctionnelle

$$I(u,K) = \mu \int_{\Omega} (u-g)^2 \; + \; \int_{\Omega \backslash K} |\nabla u|^2 \; + \nu \mathcal{H}^1(K),$$

où g est l'image originale, c'est-à-dire une fonction bornée sur l'ouvert Ω du plan et $u \in H^1(\Omega \backslash K)$ est la fonction approximante, régularisée sur les composantes connexes de $\Omega \backslash K$. L'ensemble des singularités K, constitué des bords des zones 'homogènes', est un compact de Ω de longueur de Hausdorff $\mathcal{H}^1(K)$. Les constantes μ et ν sont réelles positives.
L'existence d'une solution faible pour le problème de minimisation de la fonctionnelle (1) a été prouvée par Ambrosio, DeGiorgi [AmDGi] et Carriero, DeGiorgi et Leaci [CaDGiLe]. Les résultats de ces auteurs impliquent que K est un ensemble rectifiable essentiellement fermé; par ailleurs Dal Maso, Morel et Solimini [DMaMoSo] ont montré que K vérifie la *propriété de concentration*:
Un borélien K de $\overline{\Omega}$ vérifie la propriété de concentration dans Ω si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\alpha = \alpha(\epsilon) > 0$ tel que, pour tout disque D_r contenu dans Ω et de centre $x_0 \in K$, on peut trouver un disque $D \subset D_r$ vérifiant $diam(D) \geq \alpha \cdot diam(D_r)$ et $\mathcal{H}^1(D \cap K) \geq (1-\epsilon) diam(D)$.
Cette propriété est conservative pour la longueur de Hausdorff $d_{\mathcal{H}^1}$: si les compacts (K_n) vérifient uniformément la propriété de concentration alors $\mathcal{H}^1(K) \leq \liminf \mathcal{H}^1(K_n)$, où K est la limite des K_n pour $d_{\mathcal{H}^1}$.
Dans le même article les auteurs montrent qu'un point (u,K), où le minimum de I est atteint, est la limite d'une suite (u_n, K_n), où K_n est l'union de n courbes lipschitziennes et K_n tend vers K pour $d_{\mathcal{H}^1}$.
Nous allons voir que la propriété de concentration ne préserve pas la rectifiabilité mais qu'une variante, impliquant les projections, permet d'obtenir la rectifiabilité et de la conserver en passant à la limite pour la distance de Hausdorff.

2.La propriété des projections

Définition 1 *On dit que K vérifie la propriété des projections si K est un sous-ensemble fermé de Ω tel que $0 < \mathcal{H}^1(K) < \infty$ et qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout disque fermé D_r, vérifiant $\mathcal{H}^1(K \cap D_{\frac{r}{4}}) \neq 0$, on ait*

$$\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[: \mathcal{H}^1\left(p_\theta(K \cap D_r)\right) \; + \; \mathcal{H}^1\left(p_{\theta+\frac{\pi}{2}}(K \cap D_r)\right) \; \geq \; \alpha r.$$

On note p_θ la projection orthogonale sur la droite L_θ qui passe par l'origine et a comme direction θ. Nous allons énoncer deux théorèmes sans les démonstrations qui ne présentent pas de difficultés.

Théorème 1 *Si K vérifie la propriété des projections alors K est rectifiable.*

C'est à dire $K = F \cup N$, où F est inclus dans une union dénombrable de courbes lipschitziennes et $\mathcal{H}^1(N) = 0$.

Théorème 2 *Soit (K_n) une suite de compacts qui tend vers K pour $d_{\mathcal{H}^1}$. Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout K_n et pour tout disque fermé D_r vérifiant $\mathcal{H}^1(K_n \cap D_{\frac{r}{4}}) \neq 0$, on ait*

$$\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[: \mathcal{H}^1\left(p_\theta(K_n \cap D_r)\right) \; + \; \mathcal{H}^1\left(p_{\theta+\frac{\pi}{2}}(K_n \cap D_r)\right) \; \geq \; \alpha r.$$

Alors K vérifie la propriété des projections avec la même constante α.

3.Les segmentations obtenues par la méthode de Mumford et Shah vérifient la propriété des projections.

Théorème 3 *Toute segmentation qui minimise la fonctionnelle de Mumford et Shah vérifie la propriété des projections et est donc rectifiable.*

Pour cela nous démontrons que si (u_n, K_n) est une suite tendant vers (u, K), où les K_n sont l'union de n courbes lipschitziennes, alors il existe une constante absolue $\alpha_0 > 0$, indépendante de n, tel que pour tout disque D_r, vérifiant $\mathcal{H}^1(K_n \cap D_{\frac{r}{4}}) \neq 0$, on ait

$$\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[: \ \mathcal{H}^1\left(p_\theta(K_n \cap D_r)\right) \ + \ \mathcal{H}^1\left(p_{\theta+\frac{\pi}{2}}(K_n \cap D_r)\right) \ \geq \ \alpha_0 r.$$

La suite K_n vérifie donc uniformément par rapport à n la propriété des projections et on en déduit le résultat par le théorème 2.

La démonstration est assez longue et reprend des techniques de [DMaMoSo] d'élimination de bords qui ne vérifient pas la propriété des projections. Pour donner une idée des techniques utilisées dans la démonstration nous allons présenter un exemple où la propriété des projections n'est pas vérifiée avec la constante α_0, et où en conséquence l'ensemble est éliminable.
Soit Ω le disque de centre O et de rayon 1. Dans un repère orthonormé du plan considérons la suite de compacts $(K_n)_{n\geq 1}$ telle que $K_n = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_n^k$, où I_n^k est le segment de longueur $\frac{1}{2^{n-1}}$ parallèle à l'axe des ordonnées et centré au point $x_n^k = \left(\frac{2k-1}{2^n}, 0\right)$.

Proposition 1 *La suite des K_n définie précédemment vérifie les propriétés suivantes:*

1. *La suite $(K_n)_{n\geq 1}$ tend vers le segment $[(0,0),(1,0)]$ pour la distance de Hausdorff.*
2. *Pour tout $n \in I\!N^\star$ on a $\mathcal{H}^1(K_n) = 1$.*
3. *La suite $(K_n)_{n\geq 1}$ vérifie uniformément la propriété de concentration.*
4. *On a: $\mathcal{H}^1\left(p_0(K_n \cap \Omega)\right) + \mathcal{H}^1\left(p_{\frac{\pi}{2}}(K_n \cap \Omega)\right) = \frac{1}{2^{n-1}}$, la somme des projections est donc plus petite que α_0 pour n assez grand.*
5. *Pour n suffisamment grand l'ensemble K_n ne peut pas être l'ensemble des contours obtenus en minimisant la fonctionnelle de Mumford et Shah et ceci quelle que soit la fonction g telle que $|g(x)| \leq 1$ presque partout sur Ω. En d'autres termes pour n assez grand, l'ensemble K_n est éliminable.*

Les quatre premiers points sont faciles à vérifier, nous ne donnons que la démonstration du point 5 et montrons directement que K_n est éliminable pour n assez grand.

Etape 1: Soit (u, K) un point où la fonctionnelle de Mumford et Shah atteint son minimium et soit Q un rectangle inclus dans Ω de longueur a et de largeur b ($b \leq a$). Posons

$$\begin{cases} v = 0 & \text{pour tout } x \in Q \\ v = u & \text{pour tout } x \in \Omega \setminus Q \end{cases}$$

Alors l'ensemble K' des sauts de v est tel que $K' \subset (K \backslash Q) \cup \partial Q$. En exprimant que $I(u, K) \leq I(v, K')$, on a

$$\int_Q |\nabla u|^2 \leq 5a \text{ avec } a < 1.$$

Etape 2: Notons $I(v, \emptyset)$ l'énergie donnée par la fonctionnelle de Mumford et Shah lorsque l'ensemble des contours est vide. En appliquant la formule de Green il vient:

$$I(u_n, K_n) - I(v, \emptyset) = 1 + \int_{K_n} (u^+(\sigma) - u^-(\sigma)) \cdot \frac{dv}{dn}(\sigma)$$

où $\dfrac{dv}{dn}$ est la dérivée de v dans la direction $n(\sigma)$ orthogonale à K_n en σ et $u^{\pm}$ est la limite de $u(\sigma \pm t n(\sigma))$ lorsque $t \to 0$.
Remarquons d'abord que grâce aux propriétés de régularité des solutions d'équations elliptiques, il existe une constante C telle que $\left|\dfrac{dv}{dn}\right| \le C$.

Pour estimer le saut $u^+ - u^-$ de u de part et d'autre de K_n, on procède aux constructions suivantes: Soit $x \in I_n^k$ et a_n^k l'extrémité d'ordonnée positive de ce segment. On construit alors le rectangle Q_l de centre a_n^k, passant par x et tel que son côté parallèle à l'axe des abscisses soit égal à $l = d(a_n^k, x)$ et son côté parallèle à l'axe des ordonnées égal à $2l$. Ce rectangle ne recoupe K_n qu'au point x. On a donc

$$|u^+ - u^-| \le \int_{\partial(Q_l)} |\nabla u|.$$

Donc

$$\int_{I_n^k} |u^+ - u^-| \left|\frac{dv}{dn}\right| \le C \int_0^{2^{-n+1}} \left(\int_{\partial(Q_l)} |\nabla u| ds \right) dl \le C \int_Q |\nabla u|,$$

où Q est le rectangle de centre a_n^k, de longueur $\dfrac{1}{2^{n-2}}$ et de largeur $\dfrac{1}{2^{n-1}}$.
Il vient

$$\int_{I_n^k} |u^+ - u^-| \left|\frac{dv}{dn}\right| \le C \left(\int_Q |\nabla u|^2 \cdot \int_Q 1 \right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{2C\sqrt{5}}{2^{\frac{3}{2}(n-1)}},$$

d'où finalement

$$I(u_n, K_n) - I(v, \emptyset) \ge 1 - \frac{2C\sqrt{5}}{2^{\frac{1}{2}(n-1)}},$$

ce qui contredit la minimalité de K_n pour n plus grand que $\log_2(20C^2) + 1$.

4. Un exemple d'ensemble totalement non rectifiable, vérifiant la propriété de concentration.

Proposition 2 *Il existe un ensemble fractal A, totalement non rectifiable, de mesure de Hausdorff finie non nulle et vérifiant la propriété de concentration.*

Nous allons donner des éléments de la construction de l'ensemble A. On considère une application multivoque $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ définie dans le plan complexe par

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1(z) &= -\tfrac{1}{2} iz - \tfrac{1}{4}, \\ \mathcal{A}_2(z) &= \tfrac{1}{2} iz + \tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

$\mathcal{A}$ est une application contractante pour $d_{\mathcal{H}^1}$, soit A son attracteur, on sait alors que A est compact (voir [BaDe]), on va construire une suite d'ensembles (A_n) qui tend vers A pour $d_{\mathcal{H}^1}$.
On se donne l'ensemble A_0, formé du segment S_0^1 d'extrémités $\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$ et $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ et on applique $\mathcal{A}$ à S_0^1 et aux segments obtenus successivement. Donc $A_n = \mathcal{A}^n(A_0) = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{2^n} S_n^i$ et $\ell(S_n^i) = 2^{-n}$.

On montre que $d_{\mathcal{H}^1}(A_p, A_q) \le 2^{-(\min(p,q)+2)}$ et $d_{\mathcal{H}^1}(A_p, A) \le 2^{-p-1}$ et que $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \le \mathcal{H}^1(A) < \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.
Pour montrer que A est totalement non rectifiable on utilise le fait que les mesures des projections de A sur l'axe vertical et horizontal sont nulles.
La propriété de concentration est vérifiée par A pour ϵ quelconque avec $\alpha = \dfrac{1}{8}$.

Bibliographie

[AmDGi] L. Ambrosio & E. DeGiorgi. *Un nuovo tipo di funzionale del calcolo delle variazioni.* Preprint Scuola Normale Superiore di Pisa, 1987.

[BaDe] M.F. Barnsley & S. Demko. Proc.R.Soc.London. Ser.A 399,1985,p.243-275.

[Be] A.S. Besicovitch. Math.Ann. vol. 98,1928,p.422-464; vol. 116,1939,p.349-357.

[CaDGiLe] M. Carriero, E. DeGiorgi & A. Leaci. Arch. Rat. Mech. Anal..,vol. 108, 1988, p.195-218.

[DMaMoSo] G. Dal Maso, J.M. Morel & S. Solimini. *A variational method in image segmentation: existence and approximation results.* S.I.S.S.A. 48 M, 1989.

[Fa] K.J. Falconer. *The Geometry of Fractal Sets.* Cambridge University Press,1985.

[MuSh] D. Mumford & J. Shah. Com. on P. and App. Maths. vol. XLII No.4, 1989.