

# Regionenwachstumsverfahren und Variations-Modelle

Georges Koepfler

CEREMADE (URA CNRS 749), Université Paris 9 Dauphine,  
Place de Lattre de Tassigny, 75775 Paris cedex 16, France

und

Université Paris 5 René Descartes,  
45, rue des Saints-Pères, 75270 Paris cedex 06, France

E-mail gk@ceremade.dauphine.fr

7. November 1995

## 1 Einleitung

Eine einfache Definition der Bildsegmentierung kann man auf folgende allgemeine Weise geben. Eine Bildsegmentierung ist ein “Cartoon”, das heißt das Originalbild wird durch eine vereinfachte Version des Bildes ersetzt, nur die ‘wichtigsten’ Grenzlinien werden gezeichnet und die Flächen mit konstanten Farben ausgefüllt.

Eine zweite, präzisere Definition bekommt man, wenn man das Bild als Menge  $\Omega = \{(k, l) / 1 \leq k \leq \text{Breite}, 1 \leq l \leq \text{Höhe}\}$  sieht, wo  $(k, l)$  ein Bildpunkt (Pixel) mit “Farbe”  $g_{kl}$  gekennzeichnet ist. Eine Segmentierung ist eine Zerlegung der Menge  $\Omega$  in Regionen  $(O_i)$  die homogen sind, das heißt alle Pixel einer Region  $O_i$  entsprechen einem “Ähnlichkeitskriterium” welches sie von den Pixeln benachbarter Regionen unterscheidet.

Klassische Referenzen für Bildsegmentierung sind [HarS],[Zu] und [RosK]. Um komplett zu sein, wollen wir nur einige Referenzen geben in welchen Energiefunktionale benutzt werden: [BeslJ],[GeiY],[KasWT], [Lec],[LeoGB],[MuN] und [BlakZ].

In diesem Beitrag wollen wir Regionenwachstumsverfahren mit Variations-Modellen (Energiefunktionale) in Verbindung bringen. In Abschnitt 2 versuchen wir die Gründe der Einführung von Variations-Modellen zu motivieren und wir präsentieren ein solches Energiefunktional. Im dritten Abschnitt zeigen wir, wie man einer speziellen Klasse von Regionenwachstumsverfahren eine Energie zuteilen kann. Im vierten Abschnitt zeigen wir, wie uns das Problem der Minimierung eines Energiefunktional zu Regionenwachstumsverfahren zurückführt. Wir präsentieren im letzten Abschnitt einen, auf ein Energiefunktional basierenden, Regionenwachstumsalgorithmus und einige Resultate.

## 2 Variations-Modelle für Bildsegmentierung

Mit einem Zitat aus [HarS] wollen wir Ziele und die Problematik der Bildsegmentierung darstellen.

*What should a good image segmentation be? Regions of an image segmentation should be uniform and homogeneous with respect to some characteristic such as gray tone or texture. Region interiors should be simple and without many small holes. Adjacent regions of a segmentation should have significantly different values with respect to the characteristic on which they are uniform. Boundaries of each segment should be simple, not ragged, and must be spatially accurate.*

*Achieving all these desired properties is difficult because strictly uniform and homogeneous regions are typically full of small holes and have ragged boundaries. Insisting that adjacent regions have large differences in values can cause regions to merge and boundaries to be lost.*

Man hat also zwei entgegengesetzte Forderungen an die Bildsegmentierung:

- Einerseits will man innerhalb von homogenen Bildregionen das Bild glätten.
- Andererseits will man die präzise Position der Grenzlinien zwischen homogenen Regionen erfassen.

Wie kann man dieses Problem angehen? Die Literatur auf diesem Gebiet ist unüberschaubar. Sehr oft wurden Methoden nur für spezifische Anwendungen entwickelt (Biologie, Satellitenbilder). Man trifft aber im allgemeinen auf die selben Probleme und auf ähnliche Lösungsvorschläge. Ein gutes Beispiel für die Komplexität der angewandten Techniken ist eine Arbeit vom W.A. Perkins [Per]. Seine Methode besteht aus 9 Schritten, in welchen abwechselnd Region und Kantenverfahren angewandt werden :

- A) Mit einer Gradientenmethode ermittelt man eine Ränderkarte. Ein Bildpunkt ist ein Randpunkt, falls der Bildgradient einen hohen Wert annimmt.
- B) Man schrumpft die Ränderregionen zu eindimensionalen Kanten zusammen.
- C) Man verlängert die so erhaltenen Ränder um geschlossene Kanten zu erhalten.
- D) Die verschiedenen Bildregionen bestimmt man durch einen Konnexionsalgorithmus.
- E) Man eliminiert die kleinen Bildregionen und ersetzt sie durch Ränderregionen.
- F) Diese Ränderregionen werden wieder zusammengeschrumpft.
- G) Man schließt die Kanten.
- H) Elimination von kleinen Kanten.
- I) Auswertung der homogenen Bildregionen.

Alle Werkzeuge, die in diesem Algorithmus angewandt werden, sind sicher nötig für ein gutes Segmentierungsprogramm.

In [PavL] findet man einen Algorithmus, der, an ein Regionenwachstumsverfahren anschließend, kleine Regionen eliminiert und die gefundenen Kanten glättet. Dieses Aneinanderreihen von diversen Algorithmen findet man sehr oft.

Für die praktische Ausführung von Perkins Methode muß man jedes “klein” und jedes “groß”, das in der Beschreibung vorkommt, durch einen präzisen Schwellenwert ersetzen. Wie wählt man diese Werte und wie wägt man sie gegeneinander ab? Inwiefern kann man das Verhalten des Algorithmus vorhersagen?

Um teilweise auf diese Fragen zu antworten, wollen wir die Bildsegmentierungsproblematik in einen mathematischen Rahmen setzen.

Weshalb soll das mathematische Modell unter Variationsform sein? Nun, man kann von einem gutem Modell auch eine Bewertung des Results erwarten. Wenn man zwei verschiedene Segmentierungen hat, sollte es möglich sein, zu entscheiden, welche der beiden die “Beste” ist! Am einfachsten ist es also, einer Segmentierung eine Energie zuzuordnen (eine reelle Zahl), welche desto kleiner ist, je ‘besser’ die Segmentierung ist.

Die Idee *a priori* ein Funktional über einem Bild zu minimieren, ist schon von Geman und Geman [GG] angewandt worden. Ehe wir ein Energiefunktional zur Segmentierung einführen, wollen wir erst einige Definitionen geben. Ein Bild ist eine Funktion  $g$ , mit Definitionsbereich  $\Omega$  (im allgemeinen ein Rechteck) in  $\mathbb{R}^2$ , mit Wertebereich in  $\mathbb{R}$  für grauwertige Bilder (praktisch ist  $g(x)$  ganzzahlig in  $[0, 255]$ ), oder in  $\mathbb{R}^N$  ( $N=3$  für Farbbilder). Die Funktion  $g : \Omega \mapsto \mathbb{R}^N$  ist natürlich im allgemeinen nicht stetig. Will man nun  $g$  durch ein Cartoon, wie oben erwähnt, ersetzen, dann ersetzt man  $g$  durch eine stückweise glatte Funktion  $u$ , deren Diskontinuitätsmenge  $K$  die Vereinigung der Kanten der homogenen Regionen ist. Man hat also, mathematisch gesehen, ein Approximationsproblem.

Die Mathematiker Mumford und Shah haben 1988 ein Funktional zur Bildsegmentierung angeboten ([MumS1, MumS2]). In seiner allgemeinsten Form schreibt sich das Funktional wie folgt

$$E(u, K) = \int_{\Omega \setminus K} (u - g)^2 dx + \mu \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \lambda \mathcal{H}^1(K). \quad (1)$$

Hier ist  $g$  das Originalbild, das über  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  definiert ist;  $u$  ist die stückweise glatte Approximationsfunktion,  $K$  ist die Menge der Singularitätspunkte von  $u$  (die Kanten der Regionen) und  $\mu$  und  $\lambda$  sind reelle Parameter. Das eindimensionale Hausdorffmaß  $\mathcal{H}^1$  ist für reguläre Kurven der “klassischen” Länge äquivalent. Für unsere Bedürfnisse beschränkt sich  $\mathcal{H}^1$  auf ein Längenmaß.

Ein Minimum dieses Energiefunktionals definiert also eine “gute” Segmentierung  $(u, K)$ : Im ersten Term fordert man, daß  $u$  eine gute quadratische Approximation von  $g$  ist, der zweite Term mißt die Regularität von  $u$  innerhalb der Regionen, und der letzte Term mißt die Gesamtlänge der Kanten, was deren Regularität beeinflusst, wie wir sehen werden. Die mathematische Analysis des obigen Funktionals ist komplex und hat viele Mathematiker beschäftigt (siehe [DeG, CaDGiLe]), zum Teil um Probleme aus

der mathematischen Physik (Kristallwachstum, Seifenblasen) zu behandeln. Eine vereinfachte Version von (1), erhält man, wenn die Funktion  $u$  stückweise konstant ist in den Regionen  $O_i$ , mit  $\Omega = \bigcup_i O_i$  und  $O_i \cap O_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ .

$$E(K) = \int_{\Omega \setminus K} (u - g)^2 dx + \lambda \mathcal{H}^1(K). \quad (2)$$

Es ist leicht zu sehen, daß in diesem Falle  $u$  in jeder Region  $O$  der Mittelwert von  $g$  ist, das heißt  $u_O = \frac{1}{|O|} \int_O g dx$ , mit  $|O|$  dem Flächeninhalt von  $O$ . Es genügt also  $K$  zu kennen, um  $u$  zu bestimmen, deswegen kommt  $u$  nicht mehr als Variable in  $E(\cdot)$  vor.

Aber sogar für diese vereinfachte Version des Funktionals gibt es keine befriedigende Methode, um ein Minimum zu bestimmen. Man hat die Wahl zwischen den “simulated annealing” Methoden, welche besonders für stark nichtkonvexe Probleme geeignet, aber ziemlich langsam sind. In [Cha] und [Rich] kann man numerische Methoden finden, welche die “T-Konvergenz” benutzen. Theoretisch sind diese Methoden sehr interessant, aber bis jetzt praktisch nicht effizient.

Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, wie einem Regionenwachstumsverfahren ein Variations-Modell zugeordnet werden kann. Der vierte Abschnitt zeigt wie man das Mumford-Shah Funktional mit einem Regionenwachstumsverfahren verbinden kann. Der letzte Abschnitt wird den Algorithmus erläutern und einige Anwendungen zeigen.

### 3 Regionenwachstumsverfahren und Variations-Modelle

Ein Regionenwachstumsverfahren wird in diesem Abschnitt folgendermaßen definiert. Es sei  $(O_i)$  eine Zerlegung des Bildes, zwei benachbarte Regionen  $O_i$  und  $O_j$  werden zusammengeschlossen falls ein prädefiniertes Kriterium  $\mathcal{P}(O_i, O_j)$  erfüllt ist,  $\mathcal{P}$  ist das Maß der Homogenität von  $O_i$  und  $O_j$ . Wenn kein Paar  $(O_i, O_j)$  mehr  $\mathcal{P}$  erfüllt, dann haben wir eine Segmentierung in Regionen die  $\mathcal{P}$ -homogen sind.

Dies ist eine allgemeine Definition von Regionenwachstumsverfahren welche unter dieser Form von Pavlidis in 1972 gegeben wurde ([Pav]). In der praktischen Ausführung eines solchen Algorithmus gibt es dann noch einige andere Fragen zu beantworten. Wie reguliert man das Wachstum? Man kann von einer Region starten und sie wachsen lassen, man kann verschiedene Regionen des Bildes unabhängig wachsen lassen. Auf diese Problematik wollen wir nicht weiter eingehen, hier hängt viel von der Implementierung der Datenstruktur ab.

Der folgende Satz zeigt, wie man einem Regionenwachstumsverfahren eine Energiefunktion zuordnen kann.

**Satz 1** *Gegeben sei ein Regionenwachstumsverfahren mit Homogenitätskriterium. Das Kriterium zum Verschmelzen von zwei Nachbarregionen  $O_i$  und  $O_j$  lasse sich wie folgt schreiben:  $a(O_i \cup O_j) - a(O_i) - a(O_j) < 0$ , wo  $a(\cdot)$  eine Funktion von  $(O_i)$  ist. Dann minimiert das Regionenwachstumsverfahren folgende Energie*

$$E((O_i)) = \sum_i a(O_i).$$

*Beweis:* Es sei  $(O_{i'})$  die neue Segmentierung, erhalten durch ein verschmelzen von  $O_i$  und  $O_j$ . Dann ist  $E((O_{i'})) - E((O_i)) = a(O_i \cup O_j) - a(O_i) - a(O_j) < 0$  und die Energie  $E$  nimmt ab /

An zwei Beispielen aus der Literatur werden wir unseren Satz veranschaulichen. Wir geben jeweils eine Kurzfassung der Methode und versuchen der Grundidee der Autoren ein Energiefunktional zuzuordnen.

**Beispiel 1: Der Algorithmus von Brice und Fennema (1970).** In [BriF] wird eine Methode beschrieben, die auf Zellverschmelzung zurückgeführt wird und die wie folgt geht:

1. Initialisierung: Alle Pixel von demselben Grauwert werden zu Regionen zusammengefaßt.
2. Zwei Regionen  $O_i$  und  $O_j$  werden vereinigt, wenn  $\frac{\text{length}(\partial_w(O_i, O_j))}{\text{length}(\partial(O_i, O_j))} > \beta$ .
3. Man iteriert Schritt 2 bis kein Verschmelzen mehr möglich ist.

Wo wir mit  $\partial(O_i, O_j)$  den gemeinsamen Rand der Regionen  $O_i$  und  $O_j$  bezeichnen,  $\partial_w(O_i, O_j)$  ist der "schwache" Rand, das heißt, die Teile von  $\partial(O_i, O_j)$ , wo der Grauwert der Pixel zwischen  $O_i$  und  $O_j$ , nicht viel ändert.

Hier werden zwei Schwellenparameter benötigt;  $\beta$  mißt den relativen Anteil des schwachen Randes und  $\delta$  bestimmt wann ein Pixel zum schwachen Rand gehört. Man kann das Kriterium dann wie folgt schreiben:

Falls

$$\beta \text{length}(\partial(O_i, O_j)) - \text{length} \left\{ (x, y) \in \partial(O_i, O_j) \middle/ \left| \frac{\partial g}{\partial n} \right| < \delta \right\} < 0,$$

dann verschmelze  $O_i$  und  $O_j$ .

Für einen Punkt  $(x, y) \in \partial(O_i, O_j)$  bezeichnen wir mit  $\frac{\partial g}{\partial n}$  die Ableitung von  $g$  in die Normalenrichtung zu  $\partial(O_i, O_j)$ . Das gibt uns den Sprung von  $g$ , zwischen  $O_i$  und  $O_j$ , in diesem Punkt.

Wir wollen jetzt Satz 1 anwenden. Zu diesem Zweck summieren wir den obigen Ausdruck über alle Nachbarregionen  $(O_i, O_j)$  und wechseln das Vorzeichen. Wenn wir mit  $K$  die Vereinigung aller Kanten bezeichnen, folgt:

$$\begin{aligned} E((O_i)_i) &= - \sum_{i,j} \beta \text{length}(\partial(O_i, O_j)) + \text{length} \left\{ (x, y) \in \partial(O_i, O_j) \middle/ \left| \frac{\partial g}{\partial n} \right| < \delta \right\} \\ &= -2\beta \text{length}(K) + 2 \text{length} \left\{ (x, y) \in K \middle/ \left| \frac{\partial g}{\partial n} \right| < \delta \right\} \\ &= 2(1 - \beta) \text{length}(K) - 2 \text{length} \left\{ (x, y) \in K \middle/ \left| \frac{\partial g}{\partial n} \right| > \delta \right\}. \end{aligned}$$

Somit haben wir eine Energie, die dann, und nur dann, abnimmt, wenn das Verschmelzungskriterium erfüllt ist. Wir können dieses Funktional leicht anders schreiben, ohne die Idee von Brice und Fennema zu verraten:

$$E(K) = \lambda \text{length}(K) - \int_K \left| \frac{\partial g}{\partial n} \right| d\sigma.$$

Unter dieser Form erscheint das Brice-Fennema-Modell als eine primitive Version der “Snakes” Algorithmen ([KasWT, CasCCD]).

**Beispiel 2: Der Algorithmus von Beaulieu und Goldberg (1989).** Beaulieu und Goldberg präsentieren in [BeaG] eine Methode, welche auf Regionendeterminierung basiert (im Gegensatz zu Beispiel 1, welches auf Kantendeterminierung basiert).

1. Initialisierung: alle Pixel werden zu Regionen erklärt.
2. Für jedes Paar Nachbarregionen  $(O_i, O_j)$  ermittelt man das Ähnlichkeitsmaß  $d(O_i, O_j)$ .
3. Man verschmilzt das Paar, welches die kleinste Distanz aufweist.
4. Man iteriert Schritt 2 und 3 bis die vorgegebene Regionenanzahl erreicht ist.

Die Autoren benutzen folgende Distanz  $d(O_i, O_j) = \text{Var}(g, O_i \cup O_j) - \text{Var}(g, O_i) - \text{Var}(g, O_j)$ , mit  $\text{Var}(g, O) = \frac{1}{|O|} \int_O g^2$ .

Der zweite Schritt in diesem Verfahren ist eine Minimierung von  $E((O_i)) = \sum_i \text{Var}(O_i)$  bei fixer Regionenanzahl. Der dritte Schritt bringt das Verfahren von der maximalen Anfangszahl der Regionen (Anzahl der Pixel) zur gewünschten Regionenanzahl. Dieser Methode wollen wir folgendes Funktional zuordnen:

$$E_\lambda((O_i)_i) = \sum_i \text{Var}(O_i) + \lambda \text{Card}((O_i)).$$

Die Anzahl der gewünschten Regionen wird hier durch den Parameter  $\lambda$  reguliert. Für kleines  $\lambda$  erhält man viele Regionen, für großes  $\lambda$  erhält man wenige Regionen. Um also die gewünschte Regionenanzahl zu erreichen genügt es  $\lambda$  schrittweise zu vergrößern und jeweils  $E_\lambda$  zu minimieren.

Wir haben, anhand von zwei Beispielen, gezeigt, wie man einem Regionenwachstumsverfahren eine Energie zuordnen kann; ähnlich kann man für eine große Klasse von Verfahren vorgehen. Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, welche Rolle Regionenwachstumsverfahren bei der Minimierung eines Energiefunktionals spielen.

Abschließend sei noch bemerkt, daß die oben besprochenen Algorithmen keinerlei Information über die Regularität der Kanten geben; dies wird möglich durch Studium der Minima der Energiefunktionale.

## 4 Das Mumford-Shah Funktional

Ohne zu sehr in mathematische Details zu gehen, wollen wir trotzdem einige Eigenschaften des Funktionals (2) erwähnen. Für Beweise und mehr Informationen kann der mathematisch interessierte Leser sich an [MumS2] oder [MoSo] halten.

Die Bildfunktion  $g$  hat als Definitionsbereich  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  und als Wertebereich  $\mathbb{R}^N$ . In  $\mathbb{R}^2$  benutzen wir die euklidische Norm und in  $\mathbb{R}^N$  eine den Daten angepaßte Norm (mehr hierüber bei den Anwendungen Abschnitt 4). Es gilt folgender Satz:

**Satz 2** *Es sei  $g$  eine meßbare, beschränkte Funktion über  $\Omega$  in  $\mathbb{R}^N$ , dann gibt es eine Kantenmenge  $K$  welche ein Minimum für*

$$E(K) = \int_{\Omega \setminus K} \|u - g\|^2 dx + \lambda \ell(K)$$

*ist. Die Punkte eines Minimums  $K$  sind entweder  $C^1$  (regulär) oder Intersektion von drei glatten Kurvenelementen aus  $K$  (mit einem Winkel von  $120^\circ$  Grad) oder Punkte, wo  $K$  auf den Rand  $\partial\Omega$  von  $\Omega$  trifft (mit einem  $90^\circ$  Grad Winkel).*

Wie schon erwähnt, haben wir das Hausdorffmaß  $\mathcal{H}^1$  durch  $\ell$  ersetzt, die klassische Länge von Kurven. Das Maß  $\mathcal{H}^1$  ist besonders wichtig für das Studium der Regularität der Kantenmenge  $K$ ; wir werden hier aber vor allem die Existenz eines Minimums erläutern. Für eine mathematische Analyse der Regularität von  $K$  sei auf die Kapitel 6 bis 12 aus [MoSo] verwiesen (und die dort zitierten Referenzen). Um die Grundideen des Beweises von Satz 2 zu diskutieren, benötigen wir folgende Definitionen:

Eine Segmentierung  $K$  heißt *2-normal* wenn für jedes Paar von Nachbarregionen  $O_i$  und  $O_j$  aus  $K$  gilt: die Segmentierung  $K'$ , die sich aus Verschmelzen von  $O_i$  und  $O_j$  ergibt, erfüllt  $E(K') > E(K)$ .

Es sei  $K \subset \Omega$  und  $L \subset \Omega$ , dann ist die Hausdorffdistanz der Mengen  $K$  und  $L$  definiert durch:

$$d(K, L) = \sup_{x \in M} \inf_{y \in L} \|y - x\| + \sup_{x \in L} \inf_{y \in K} \|y - x\|.$$

**Lemma 1** *Gegeben sei eine 2-normale Segmentierung mit  $\alpha$  Regionen. Dann gilt:*

$$\alpha \leq \frac{288|\Omega| \text{osc}(g)^4}{C^2 \lambda^2}.$$

Mit  $C$  als einer reellen Konstanten und  $\text{osc}(g) = \sup(g) - \inf(g)$ .

Im Beweis dieses Lemmas zeigt man unter anderem, daß der Flächeninhalt einer Region nach unten beschränkt ist durch eine positive Konstante, die nur von  $g$ ,  $|\Omega|$  und  $\lambda$  abhängt. Deshalb kann man sagen, daß durch Minimierung von  $E(K)$  kleine Regionen spontan eliminiert werden. In vielen Verfahren wird hierfür ein extra Schritt benötigt.

**Lemma 2** *Es existiert eine 2-normale Segmentierung  $K$  für welche gilt:*

$$E(K) = \min_{\tilde{K}} E(\tilde{K});$$

*man minimiert über der Menge aller 2-normaler Segmentierungen  $\tilde{K}$ .*

Dieses Lemma hilft nicht nur für den Beweis von Satz 2, es zeigt uns auch, daß ein Minimum in der Klasse der 2-normalen Segmentierungen gefunden werden kann; um präzise zu sein, die Klasse der 2-normalen Segmentierungen ist kompakt für die Hausdorffdistanz.

Obwohl die genaue Bestimmung eines Minimums von (2) nicht möglich ist, haben wir einen Ausweg: Regionenwachstumsverfahren. Sie liefern uns 2-normale Segmentierungen von welchen wir nun wissen, daß sie eine "beschränkte" (im Sinne von kompakt) Menge bilden, und in dieser Menge findet man ein Minimum von  $E(K)$ . Desweiteren hat eine Region einer 2-normalen Segmentierung einen nach unten beschränkten Flächeninhalt.

Im folgenden Abschnitt werden wir unser Regionenwachstumsverfahren, welches auf das Mumford-Shah Funktional basiert, beschreiben.

## 5 Algorithmus und Anwendungsbeispiele

In diesem Abschnitt beschreiben wir ein Regionenwachstumsverfahren, das auf dem Funktional von Satz 2 basiert.

**Algorithmus:** Der Entschluß, zwei Regionen  $O_i$  und  $O_j$  zu verschmelzen, hängt vom Vorzeichen des Ausdrucks  $E(K \setminus \partial(O_i, O_j)) - E(K)$  ab. Ist dieser Ausdruck negativ, dann ermöglicht ein Verschmelzen von  $O_i$  und  $O_j$  zu  $O_i \cup O_j$ , eine Senkung der Energie. Das Verschmelzungskriterium heißt damit:

Wenn

$$\frac{|O_i| \cdot |O_j|}{|O_i| + |O_j|} \cdot \|u_{O_i} - u_{O_j}\|^2 < \lambda \cdot \ell(\partial(O_i, O_j)) ,$$

dann verschmelze  $O_i$  und  $O_j$ .

Hier ist  $|\cdot|$  der Flächeninhalt,  $u_{O_i}$  die Approximation von  $g$  in  $O_i$  und  $\|\cdot\|$  eine Norm im Wertebereichsraum  $\mathbb{R}^N$ . Es sei  $g = {}^t(g^1, \dots, g^N)$  und  $u_O = {}^t(u_O^1, \dots, u_O^N)$ .

Jeder Region werden  $N$  Kanäle zugeordnet  $c_O^l = \int_O g^l$ , ( $l = 1, \dots, N$ ), diese ermöglichen es schnell  $u_O$  zu berechnen:  $u_O^l = \frac{c_O^l}{|O|}$ . Will man die Kanäle der Region  $O_{new} = O_i \cup O_j$  ermitteln, muß man nur  $|O_{new}| = |O_i| + |O_j|$  und  $c_{O_{new}}^l = c_{O_i}^l + c_{O_j}^l$ , ( $l = 1, \dots, N$ ) berechnen.

Somit ist ein Verschmelzen zweier Regionen mit dem Addieren der entsprechenden Kanäle und dem Auffrischen der Datenstruktur verbunden.

Man kann den Algorithmus dann folgendermaßen beschreiben

- (i) Man nehme die Trivial-Segmentierung des Bildes in einzelne Pixel als Startpunkt.
- (ii) Für jedes Paar von Nachbarregionen ermittelt man den Wert von  $\lambda$ , für welchen ein Verschmelzen möglich ist.
- (iii) Das Paar, welchem der kleinste  $\lambda$ -Wert zugeordnet ist, wird verschmolzen und die dadurch geänderten  $\lambda$ -Werte aufgefrischt.

- (iv) Man wiederholt Schritt (ii) und (iii) bis die gewünschte Regionenanzahl oder der gewünschte  $\lambda$ -Wert erreicht ist.

Die Methode ist pyramidal, damit meinen wir, daß man für  $\lambda < \lambda'$ ,  $K_{\lambda'} \subset K_{\lambda}$  hat; vom Maßstab  $\lambda$  kann man eine Segmentierung vom Maßstab  $\lambda'$  ableiten.

**Beispiele:** Die Anwendungen die wir hier präsentieren, sind vom *CEREMADE* und von *Cognitech, Inc.* Santa Monica, Kalifornien, durchgeführt worden.

Das erste Bild (Figur 1) zeigt eine Grauwert-Segmentierung. Im oberen Teil sehen wir das Originalbild  $g$ . In der Mitte links die stückweise konstante Approximation  $u$  und rechts die Kantenmenge  $K$  mit jeweils 200 Regionen ( $\lambda = 2021,62671$ ). Unten haben wir noch einmal  $(u, K)$ , aber mit 50 Regionen ( $\lambda = 6173,27637$ ).

Man kann einerseits die Verschachtelung der Segmentierungen feststellen ( $K_{6173,27637} \subset K_{2021,62671}$ ), andererseits sieht man auch die Grenzen eines stückweise konstanten Modells.

Die nächsten Beispiele zeigen Anwendungen des gleichen Algorithmus zur Texturdiskriminierung (aus [KoeLM] und [LM]).

Zuerst wollen wir Brodatz-Texturen nehmen ([Bro]), dies sind Bilder, mit Histogrammgleichsetzung, von natürlichen Materialien. Diese Art von Textur wird sehr leicht durch die Wavelet-Transform diskriminiert. In der Tat sind die meisten Kanäle, die in den Algorithmen von [MaP, VP, BovCG, U] benutzt werden, Resultate von Linearoperatoren, welche im Rahmen der Wavelet-Theorie durch einen schnellen Algorithmus ermittelt werden ([Ma]).

Die Daten welche hier segmentiert werden sind also nicht das Originalbild, sondern die Resultate, auf mehreren Maßstäben, der Wavelet-Filter. Wir benutzten nicht die Grauwerte, sondern nur die “Direktionsinformation” der Filter.

In Figur 2 haben wir ein Bild das drei verschiedene Texturen enthält. Unser Ziel war es die Diskriminierungsmöglichkeit der Wavelet-Filter zu testen; die Aufgabe des Programmes war es drei Regionen zu finden. Die Kantenmenge ist in Figur 3 abgebildet (wir benutzten die Haar-Wavelet-Basis).

Eine andere Art von Texturen sind die Julesz-Texturen. Nach der Theorie von Julesz bestehen Texturen aus “Textons”, welche mit einer bestimmten Dichte verteilt sind. In Figur 4 haben wir vier Beispiele und die Kanten, die gefunden wurden. Diese Art von Textur ist nicht mit Hilfe der Wavelet-Filter diskriminierbar. In [LM] werden geometrische Filter eingeführt (auf der Krümmung basierend), welche eine Diskriminierung ermöglichen, wie die Kanten in Figur 4 zeigen (hier wurde nach jeweils zwei Regionen gefragt).

Eine andere interessante Anwendung, ist die Möglichkeit der Rekonstruktion  $u$  auszunutzen (aus [KoeMNR]). In der Texturdiskriminierung werden nur die Kanten  $K$  genutzt, um natürliche Bilder von unnötigen Texturen zu befreien ist die Bildfunktion  $u$  interessant. Das Originalbild (Figur 5) wird wieder mit den Wavelet-Filtern (Haar-Basis) analysiert. Dann wird segmentiert und die stückweise konstante Funktion  $u$  wird mit Hilfe der

Wavelet-Transform in ein Bild zurückgeführt. In Figur 6 kann man dieses Endresultat sehen.

Zum Vergleich wird in Figur 7 eine Grauwert-Segmentierung gezeigt, der Informationsverlust ist klar, Figur 8 zeigt die respektiven Kantenmengen.

## References

- [BeaG] J.M. Beaulieu and M. Goldberg. *Hierarchy in picture segmentation : a stepwise optimization approach*. IEEE PAMI, 11(2), February 1989.
- [BeslJ] P.J. Besl and R. Jain. *Segmentation through variable-order surface fitting*. IEEE PAMI, 10, n°2, 167-192, March 1988.
- [BlakZ] A. Blake and A. Zisserman. *Visual Reconstruction*. MIT Press, 1987.
- [BovCG] A.C. Bovik, M. Clark and W. S. Geisler. *Computational texture analysis using localized spatial filtering*. IEEE 1987.
- [BriF] C. Brice and C. Fennema. *Scene analysis using regions*. Artificial Intelligence, 1, 205-226, 1970.
- [Bro] Ph. Brodatz. *Textures for artists and designers*. Dover Publications Inc. NY 1966.
- [CaDGiLe] M. Carriero, E. DeGiorgi & A. Leaci. *Existence theorem for a minimum problem with free discontinuity set*. Arch. Rational Mech. Anal., 108, 195-218, 1989.
- [CasCCD] V. Caselles, F. Catté, T. Coll and F. Dibos. *A geometric model for active contours*. Numerische Mathematik, 66:1-31, 1993.
- [Cha] A. Chambolle. *Image segmentation by variational methods: Mumford and Shah functional and the discrete approximations*. Preprint CEREMADE, to appear in SIAM Journal on Applied Mathematics.
- [DeG] E. De Giorgi. *Free discontinuity problems in calculus of variations*. Frontiers in pure and applied Mathematics, R. Dautray Ed., 55-61, North-Holland, 1991.
- [GeiY] J.D. Geiger and A. Yuille. *A common framework for image segmentation*. IEEE Proc. 10th Int. Conf. on Pattern Recognition (I), 502-507, Atlantic City 1990.
- [GG] S. Geman & D. Geman. *Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images*. IEEE PAMI 6, 1984.
- [HarS] R.M. Haralick and L.G. Shapiro. *Image segmentation techniques*. Computer Vision Graphics and Image Processing, 29, 100-132, 1985.

- [Ju] B. Julesz. *Texton gradients: the texton theory revisited*. Biol. Cyb.,54,254-251, 1986.
- [KasWT] M. Kass, A. Witkin and D. Terzopoulos. *Snakes: active contour models*. Proc. 1st Int. Comp. Vis. Conf. 1987, 259-267.
- [KoeLM] G. Koepfler, J.M. Morel and C. Lopez. *A multiscale algorithm for image segmentation by variational method*. SIAM J. of Num. Analysis, 31-1, pp.282-299, Februar 1994.
- [KoeMNR] G. Koepfler, J.M. Morel, F. Nordby and L. Rudin. Fast variational algorithm for clutter removal through pyramidal domain decomposition. Proc. of *SPIE*, vol. 2037, pp.2-22, San Diego, July 1993.
- [Lec] Y. Leclerc. *Constructing stable descriptions for image partitioning*. Int.J.C.Vis. 3, 73-102, 1989.
- [LeoGB] A. Leonardis, A. Gupta and R. Bajcsy. *Segmentation as the search for the best description of images in terms of primitives*. Technical report n°2 MS-CIS-90-30, GRASP LAB 215, University of Pennsylvania.
- [LM] C. Lopez and J.M. Morel. *Axiomatization of shape analysis and application to texture hyperdiscrimination*. I.E.E.E. Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition 93, June 15-18, New-York.
- [MaP] J. Malik. & P. Perona. *Preattentive texture discrimination with early vision mechanisms*. Journ. of the Opt. Society. of America. A, 923-932, vol. 7, n°5, 1991.
- [Ma] S. Mallat. *A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation*. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 674-693, July 1989.
- [MoSo] J.M. Morel and S. Solimini. *Variational Methods in Image Segmentation*. Birkhäuser Boston, 1995.
- [MuN] D. Mumford. and M. Nitzberg *The 2.1-D sketch*. Preprint, Department of Mathematics, Harvard University Cambridge MA.
- [MumS1] D. Mumford & J. Shah. *Boundary detection by minimizing functionals*. IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, San Francisco 1985.
- [MumS2] D. Mumford & J. Shah. *Optimal Approximations by Piecewise Smooth Functions and Associated Variational Problems*. Communications on Pure and Applied Mathematics. vol. XLII No.4, 1989.
- [Pav] T. Pavlidis. *Segmentation of pictures and maps through functional approximation*. Comp. Gr. and Im. Proc. 1, 360-372, 1972.

- [PavL] T. Pavlidis & Y.T. Liow. *Integrating Region Growing and Edge Detection*. Proc. of the IEEE Conf. Comp. Vision and Patt. Recognition 1988.
- [Per] W.A. Perkins. *Area segmentation of images using edge points*. IEEE PAMI 2(1), January 1980.
- [Rich] T.J. Richardson. *Scale independant piecewise smooth segmentation of images via variational methods*. PhD. Dissertation, Lab. for Information and Decision Systems, MIT, Cambridge MA 02139, February 1990.
- [RosK] A. Rosenfeld and Kak A.C. *Digital picture processing, Computer Science and Applied Mathematics*. Academic Press 1982.
- [U] M. Unser. *Texture discrimination using wavelets*. I.E.E.E. Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition 93, June 15-18, New-York.
- [VP] H. Voorhees and T. Poggio. *Computing texture boundaries from images*. Nature, 333, 364-367, 1988.
- [Zu] S.W. Zucker. *Region growing: Childhood and Adolescence (Survey)*. Comp. Graphics and Image Proc. 5, 382-399, 1976.

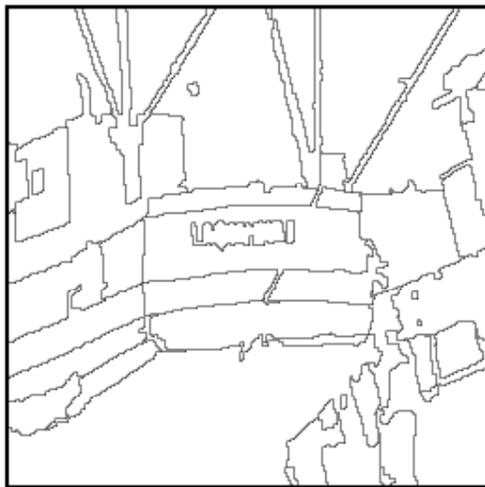
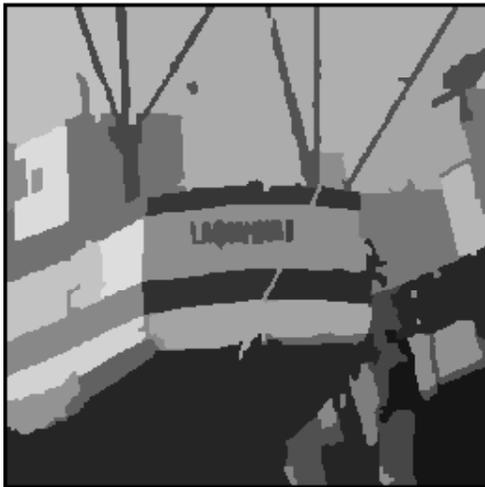
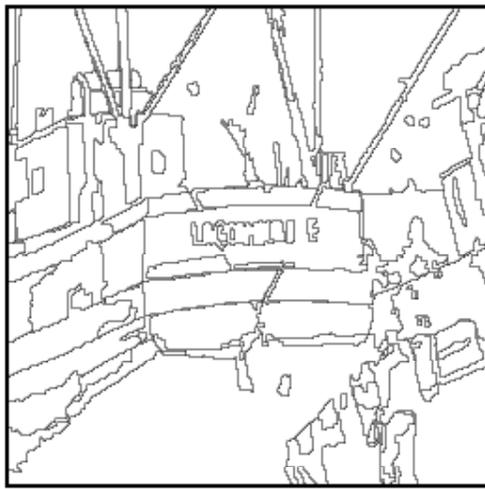


Figure 1: Grauwert Segmentierung.

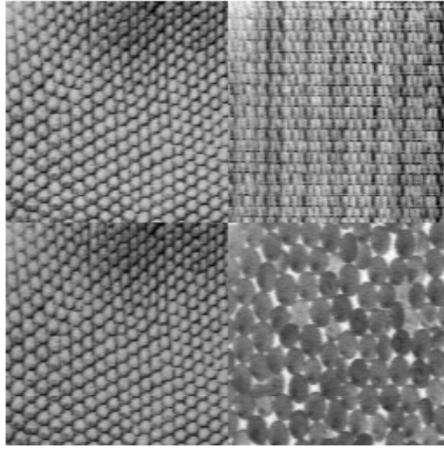


Figure 2: Drei Brodatz-Texturen.

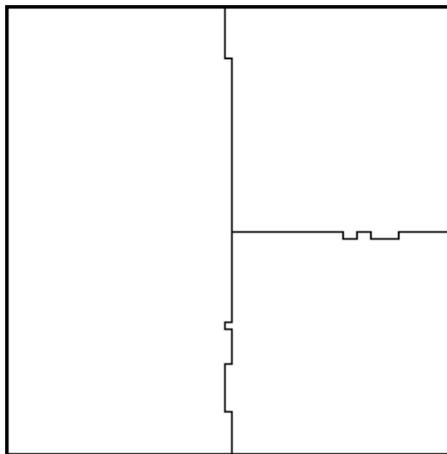


Figure 3: Diskriminierung der drei Texturen.

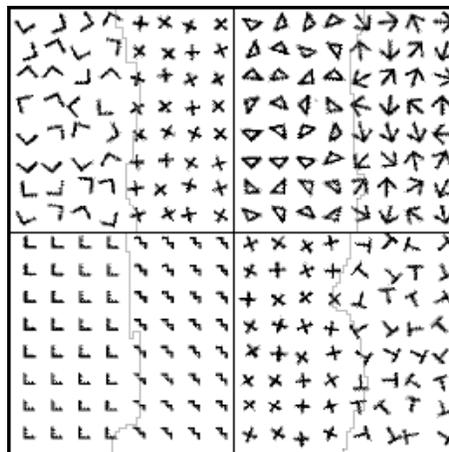


Figure 4: Vier Beispiele für die Diskriminierung von Julesz Texturpaaren.



Figure 5: Original Bild aus der USC IPI data base.



Figure 6: Resultat der Wavelet-Rekonstruktion.



Figure 7: Resultat der Grauwert-Segmentierung.

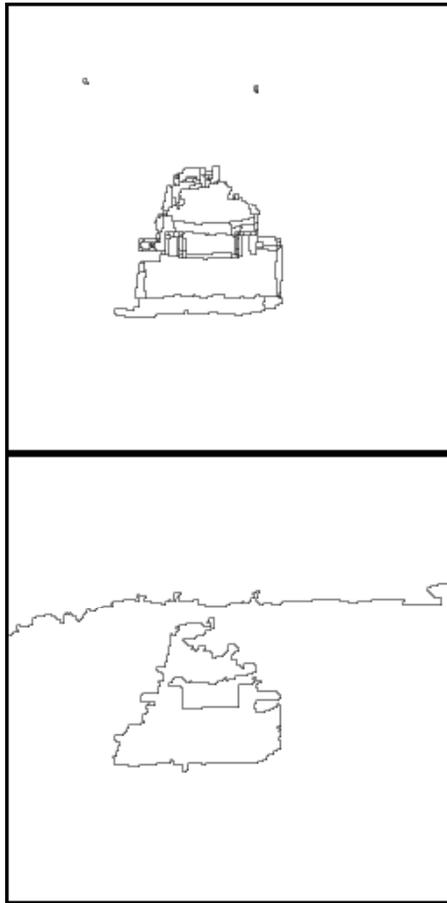


Figure 8: Vergleich der Kantenmengen.