
Méthodes de recalage et de co-recalage, métriques à noyaux et modèles géométriques associés.

Mémoire

présenté et soutenu publiquement le 5 décembre 2017

pour l'obtention d'une

**Habilitation à diriger des recherches
de l'Université Paris Descartes**

(Discipline : Mathématiques Appliquées)

par

Joan Alexis Glaunès

Composition du jury

Président : Lionel Moisan

Rapporteurs : Simon Masnou
Xavier Pennec

Examineurs : Isabelle Bloch
Alain Trouvé

Mis en page avec la classe thesul.

Remerciements

Les travaux présentés ici ont tous été co-écrits, et je tiens d'abord à remercier mes collaborateurs. Je citerais simplement ici ceux avec qui j'ai pu travailler de façon proche et suivie, récemment ou moins récemment : Sarang Joshi, Mario Micheli, Pierre Roussillon, Claire Cury entre autres, avec qui j'ai pu partager quelques heureux et rares moments où les problèmes sont regardés en détail et les idées surviennent. Parfois ces travaux ouvraient la voie vers d'autres études qui sont encore restées à l'état de projets faute de temps ; j'espère que nous aurons l'occasion de les poursuivre bientôt.

Je remercie très chaleureusement Simon Masnou, Xavier Pennec et Martin Rumpf d'avoir rapporté sur mon dossier d'habilitation, ainsi qu'Isabelle Bloch, Lionel Moisan et Alain Trouvé d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Mes remerciements vont enfin à tous mes collègues et amis du MAP5, particulièrement en l'occurrence à Bruno, Julie et Flora qui m'ont encouragé et poussé à rédiger ce mémoire et soutenir mon habilitation.

Enfin merci à Luba pour son soutien quotidien, à Emma pour sa joie de vivre et sa complicité.

Sommaire

Introduction	vii
1 Le modèle difféomorphique pour l'analyse de forme	vii
1.1 Origines du modèle et domaines liés	vii
1.2 Le modèle difféomorphique et l'analyse morphométrique en quelques mots	viii
1.3 Développement et extensions de la théorie	viii
2 Présentation des travaux	ix
2.1 Positionnement	ix
2.2 Résumé et organisation des différents chapitres	ix
Principaux travaux présentés dans ce mémoire	xv
Autres travaux mentionnés	xvii
Chapitre 1 Le modèle difféomorphique et la méthode du tir géodésique pour les problèmes discretisés	1
1.1 Difféomorphismes et géodésiques	1
1.1.1 Modèle difféomorphique pour la comparaison de formes	1
1.1.2 Cadre mathématique du modèle difféomorphique	1
1.1.3 Actions de groupes et espaces de formes	2
1.1.4 Problèmes d'appariement, principes de réduction et implications sur les approches algorithmiques	3
1.1.5 Problème d'appariement simple dans le cadre discret	3
1.1.6 Première réduction et paramétrisation à l'aide de vecteurs moment dépendant du temps	4
1.1.7 Equations géodésiques et paramétrisation à l'aide des vecteurs moments initiaux	5
1.2 Un problème d'appariement générique multi-difféomorphismes, multi-cibles, multi-temps	6

1.2.1	Choix des méthodes numériques pour l'intégration des équations différentielles et l'optimisation	8
1.3	Exemples numériques	9
Chapitre 2 Espaces de Hilbert à valeurs vectorielles invariants et noyaux associés		13
2.1	Noyaux vectoriels : définitions	13
2.2	Résultats de régularité	14
2.3	Noyaux invariants par rotations et translations	15
2.4	Noyaux à divergence nulle et à rotationnel nul	16
2.5	Exemples numériques : tirs géodésiques et appariement avec noyaux TRI	17
Chapitre 3 Courants et cycles normaux		19
3.1	Courants	19
3.1.1	Formes différentielles et courants	19
3.1.2	Courants associés aux ensembles rectifiables	21
3.1.3	Normes hilbertiennes duales sur les espaces de courants	21
3.1.4	Expression de la métrique pour les modèles discrets	22
3.1.5	Exemples numériques	23
3.2	Cycles normaux	23
3.2.1	Cycle normal	24
3.2.2	Métriques à noyaux sur les cycles normaux	29
3.2.3	Cycle normal d'une chaîne polyédrale et approximations discrètes	29
Chapitre 4 Méthodes d'estimation de forme prototype		35
4.1	Introduction : revue bibliographique des différentes approches	35
4.2	Algorithme "rétrograde" pour les mesures et courants	36
4.3	Méthode du barycentre itéré	36
4.4	Estimation multi-prototypes : un algorithme inspiré des k-means	42
Chapitre 5 Études Applicatives		43
5.1	Co-recalage du cerveau basé sur les sillons corticaux : la méthode DISCO	43
5.2	Analyse morphométrique de l'oreille humaine pour l'individualisation des techniques de spatialisation sonore	45
Chapitre 6 Projets en cours et perspectives		47
6.1	Utilisation des k -jets pour les modèles difféomorphiques discrets	47
6.2	Estimation des paramètres des noyaux vectoriels dans les modèles difféomorphiques	47

6.3	Collaboration avec CARLab : modèles difféomorphiques 3D/4D couplés et noyaux semi-reproduisants	48
6.4	Modèles d'estimation multi-prototypes	48
6.5	Espaces de formes et métamorphoses	49
6.6	Analyses longitudinales et modèles multi-prototypes de branchements	49
6.7	Modèle des cycles normaux	50
	Bibliographie	51

Introduction

Je présente dans ce mémoire une sélection de travaux menés depuis ma thèse de doctorat. Ces travaux s’inscrivent dans le cadre des modèles difféomorphiques pour le recalage et l’estimation des déformations entre structures géométriques en analyse d’images. Ces modèles ont été initiés il y a une vingtaine d’année et se sont développés fortement depuis, avec des recherches de plus en plus poussées sur le plan théorique et applicatif. Le domaine d’application privilégié est celui de l’anatomie numérique, qui consiste à analyser la variabilité saine ou pathologique de la forme géométrique des organes, mesurées sur des bases de données d’images médicales. D’un point de vue théorique, ces modèles sont liés ou font appel à plusieurs domaines tels que la théorie du contrôle, la géométrie riemannienne en dimension infinie, la mécanique hamiltonienne, les statistiques, le transport optimal, et de ce fait ont intéressé un nombre croissant de chercheurs au fil des années.

1 Le modèle difféomorphique pour l’analyse de forme

1.1 Origines du modèle et domaines liés

Le modèle difféomorphique pour la comparaison de formes, appelé aussi modèle de grandes déformations, souvent désigné par l’acronyme LDDMM pour *Large Deformation Diffeomorphic Metric Mapping*, a été initié il y a une vingtaine d’années, conjointement en France par Alain Trounev, Laurent Younes, Robert Azencott [Tro95, You98] d’une part, et d’autre part par Gary Christensen, Michael Miller, Paul Dupuis aux Etats-Unis [CRM96, DGM98]. Aux origines de cette théorie on cite souvent le biologiste et mathématicien d’Arcy Thompson et son ouvrage *On growth and form*, publié initialement en 1917 et révisé en 1942 [T⁺42]. Il y défend notamment l’idée que les différences entre les formes de certaines espèces ou certains organes présents dans la nature peuvent s’expliquer par l’application de transformations simples de l’espace. Même si cette thèse n’a a priori pas de fondement biologique pertinent, elle introduit premièrement l’idée générale que l’on puisse développer une théorie mathématique de l’étude des formes et des populations de formes, et d’autre part l’idée que les différences entre formes peuvent dans certains cas s’expliquer, en tout cas géométriquement, par l’action de transformations de l’espace qui transportent les formes. A partir des années 1970, plusieurs chercheurs ont développé une théorie des espaces de forme et des statistiques sur ces espaces, notamment le probabiliste et statisticien D.G. Kendall [Ken89] ainsi que Fred Bookstein, connu notamment pour le modèle Thin Plate Splines [Boo89]. On peut renvoyer à [Boo97, DM98] pour des ouvrages généraux sur ce sujet. D’autre part, le formalisme de la théorie des patterns introduite par Ulf Grenander [GRE93] a directement guidé les premiers travaux sur les modèles difféomorphiques. Enfin la problématique du recalage d’images, non pas pour l’analyse de forme mais pour la comparaison des signaux indépendamment de la forme, est apparue très tôt dans le domaine de l’imagerie médicale [Bro92]. Elle est évidemment très liée aux méthodes difféomorphiques et celles-ci sont aussi

utilisées comme méthodes de recalage ; notamment elles permettent de garantir l'inversibilité des déformations induites, ce qui est une des propriétés souhaitables en recalage.

D'autre part, depuis le début de son développement, les aspects les plus théoriques du modèle difféomorphique ont bénéficié de nombreuses connexions avec des domaines mathématiques connus. On peut ainsi mentionner des liens avec la théorie des espaces à noyaux reproduisants [Aro50b, Sch64] et les méthodes d'interpolation par splines [Att70, Duc77], la mécanique hamiltonienne et l'interprétation géométrique des équations de la mécanique des fluides (travaux de Arnold, Holm, Marsden, Ratiu [Arn66, HMR98]), la géométrie riemannienne en dimension infinie [MM13, BBM14], la théorie du contrôle optimal et la géométrie sous-riemannienne [ATTY15], les définitions et calculs de moyennes en géométrie riemannienne [ADPY12], le transport optimal [KLMP13, MRSS15, GV16]), l'étude des métriques sur les espaces de courbes [MM06, MM07].

1.2 Le modèle difféomorphique et l'analyse morphométrique en quelques mots

Le modèle difféomorphique consiste en une construction mathématique de groupes de difféomorphismes munis d'une métrique induite par une métrique locale hilbertienne sur les champs de vecteurs. L'idée est donc de considérer des difféomorphismes définis en tant que flots de champs de vecteurs dépendant du temps, champs de vecteurs qui constituent alors des variables de contrôle pour un problème de comparaison de formes. Autrement dit, en considérant par exemple le problème originel d'appariement/recalage de deux formes géométriques S et T vivant dans l'espace \mathbf{R}^d (ou plus généralement une variété), on cherche une famille de champs de vecteurs $(v_t)_{t \in [0,1]}$ définis sur cet espace tels que leur application flot ϕ^v permette d'apparier S sur T , c'est-à-dire tels que $\phi(S)$ soit égal à T , ou géométriquement proche.

La métrique sur le groupe de difféomorphismes ainsi construit induit une métrique, à la fois localement et globalement, sur l'espace des formes considéré : images, courbes, points, ce qui offre une vision géométrique très intuitive des données. De plus il est possible d'étudier ces métriques intrinsèquement et de dériver les équations des trajectoires optimales (géodésiques), notamment pour en déduire des méthodes algorithmiques plus performantes. L'interprétation en termes d'espace de formes permet également de guider les méthodes d'analyse de populations de formes, qui reviennent alors à effectuer des statistiques sur des variétés.

1.3 Développement et extensions de la théorie

A la suite des premiers travaux théoriques déjà mentionnés sur le modèle difféomorphique, puis des premiers algorithmes d'appariement d'images et de landmarks [BMTY05, JM00], de nombreuses extensions ou variations ont été proposées dans la littérature, afin de répondre aux besoins applicatifs. Certains travaux ont ainsi proposé des modèles difféomorphiques sur la sphère pour les applications en imagerie cérébrale [BJM99],[7], puis des méthodes spécifiques pour traiter différents types de données sont apparues : nuages de points non labellisés [8], courbes [1], surfaces [9], champs de tenseurs [CMM⁺06]. Des méthodes numériques avancées ont ensuite été développées, bénéficiant notamment de l'écriture des équations géodésiques et adjointes dans l'espace des images ou des landmarks [VMYT04, MTY06, AEGG08, Ash07, VRRC12]. D'autres travaux ont proposé des nouveaux types de noyaux pour la modélisation des difféomorphismes : noyaux multi-échelles [BRV12], noyaux non-scalaires à divergence nulle ou rotationnel nul [2]. On pourra aussi citer des extensions ou variations sur le modèle classique : modèle des démons difféomorphes [VPPA09, YSV⁺10], modèles de métamorphoses [TY05, HTY09, RY13a], modèles stochastiques [TV12, AHS17], modèles multi-échelles [SLNP13].

Enfin une partie importante des recherches dans le domaine s'est attachée à explorer ce qu'on pourrait nommer l'étape suivante du programme d'analyse morphométrique : comment, une fois posé un modèle de déformation et des algorithmes d'appariement adaptés pour les différents types de données, opérer pour explorer une base de données de formes anatomiques et établir des statistiques sur la population permettant par exemple de diagnostiquer certaines pathologies ou en prévoir l'évolution. Ainsi on peut citer entre autres des méthodes d'estimation de prototype ou de construction d'atlas [DPTA09, MMTY08, ADK15]) ainsi que des méthodes de régression pour les études longitudinales [DFBJ10, RHMS12, DFBJ07, HFJ14, TV12], des modèles paramétrés sparses ou contraints pour l'interprétabilité [DPC⁺14, GDT15], et des méthodes statistiques adaptées à la géométrie non-linéaire des espaces [FLPJ04, FLJ03, PF15, YGQ11, MHP17].

2 Présentation des travaux

2.1 Positionnement

Les travaux présentés dans ce mémoire s'inscrivent naturellement dans le panorama général évoqué dans la partie précédente car ils cherchent à étendre les possibilités applicatives des modèles difféomorphiques dans certaines directions spécifiques : possibilité d'utiliser des espaces de champs à divergence nulle ou irrotationnels pour modéliser les déformations, termes d'attache aux données plus efficaces pour comparer les courbes ou les surfaces, méthodes de calcul de formes prototype..

Cependant plusieurs de ces travaux s'inscrivent aussi dans leurs domaines de recherche respectifs indépendamment des applications LDDMM : ainsi l'étude des noyaux reproduisant vectoriels invariant du chapitre 2 est totalement indépendante du modèle difféomorphique pourrait être utile dans beaucoup d'autres domaines, les modèles discrets pour les courbes ou surfaces (chapitre 3) peuvent être utilisés pour servir de termes d'attache pour d'autres modèles que les modèles difféomorphiques (comme c'est le cas notamment dans [10]).

2.2 Résumé et organisation des différents chapitres

Chapitre 1 : modèle difféomorphique et la méthode du tir géodésique pour les problèmes discrétisés

Ce premier chapitre est consacré à une présentation brève du modèle difféomorphique classique et du modèle d'espace de formes qu'il induit sur les n -uplets de points dans \mathbf{R}^d , appelé espace des landmarks. J'y présente la formulation hamiltonienne des équations géodésiques et des équations adjointes utilisée dans la méthode de tir géodésique pour une très grande classes de problèmes discrétisés. Cet algorithme général est à la base de la résolution de nombreux problèmes pratiques écrits dans le cadre du modèle difféomorphique : problèmes d'appariement, d'estimation d'atlas, régression, etc.

Chapitre 2 : Étude des noyaux RKHS invariants non scalaires

Ce travail a été effectué en collaboration avec Mario Micheli lors de son post-doctorat au MAP5 en 2012 et 2013. Il s'agissait de caractériser les noyaux reproduisant d'espaces de Hilbert de champs de vecteurs invariants par rotations et translations. Ces noyaux interviennent de manière centrale dans les méthodes d'appariement difféomorphiques pour la comparaison de structures géométriques. Les travaux utilisant ces méthodes, qu'ils soient théoriques ou applicatifs, considèrent toujours des noyaux scalaires (plus précisément la matrice noyau est égale à

$K(x, y) = k(x, y)I_d$ où $k(x, y)$ est un noyau scalaire et I_d la matrice identité), alors qu'a priori la classe des noyaux matriciels envisageables est beaucoup plus large. En limitant l'étude aux noyaux invariants par rotations et translations (l'hypothèse d'invariance est naturelle voire indispensable pour la plupart des applications), nous avons pu caractériser précisément la classe des noyaux matriciels correspondante, en montrant qu'elle était paramétrée par deux noyaux scalaires. Plus précisément, un noyau matriciel sur \mathbf{R}^d invariant par rotations et translations s'écrit $K(x, y) = k(x - y)$ avec

$$k(u) = k^{\parallel}(\|u\|)\pi_u + k^{\perp}(\|u\|)\pi_u^{\perp},$$

où k^{\parallel} et k^{\perp} sont deux fonctions scalaires et π_u, π_u^{\perp} sont les projections orthogonales sur $\text{Vect}(u)$ et son orthogonal. Nous avons ensuite cherché à caractériser la transformée de Fourier de ces noyaux afin d'obtenir un équivalent du théorème de Bochner pour les noyaux scalaires. Nous avons établi que la transformée de Fourier du noyau dépend également de deux fonctions scalaires h^{\parallel} et h^{\perp} , qui doivent être positives pour que le noyau matriciel soit de type positif. Nous avons également déterminé les formules de transformation (de type transformée de Hankel) permettant de passer du couple $(k^{\parallel}, k^{\perp})$ à $(h^{\parallel}, h^{\perp})$, et inversement, et surtout nous avons découvert que les cas $h^{\parallel} = 0$ et $h^{\perp} = 0$ correspondent aux noyaux d'espaces de champs à divergence nulle et irrotationnels respectivement, qui peuvent être d'une grande importance pour certaines applications en analyse de déformations. Nous avons finalement montré, à la fois théoriquement et par des simulations que ces noyaux étaient pleinement valides pour être utilisés dans le cadre des méthodes LDDMM. Ce travail a abouti à la publication d'un article dans la revue *Geometry, Imaging and Computing* [2].

Chapitre 3 : Courants et cycles normaux

Ce chapitre présente des modèles mathématiques basés sur des outils de théorie géométrique de la mesure permettant de fournir des termes d'attache aux données dans les algorithmes d'appariement pour des données de type nuages de points, courbes ou surfaces. Ces modèles sont fondées sur la définition d'espaces de Hilbert à noyaux reproduisants permettant de considérer les formes comme éléments d'un espace dual adapté. Ces types de métriques se montrent d'une grande utilité pratique comme termes d'attache aux données car ils sont relativement simples à coder (en tout cas pour le modèle simple des courants) et ne nécessitent pas de travailler avec une paramétrisation des courbes ou des surfaces. De fait ils permettent de comparer des formes dont les topologies sont différentes : courbes connexes ou non, avec ou sans branchements, etc.

Métriques à noyaux sur les espaces de courants pour la comparaison de courbes ou surfaces Ce travail a été initié pendant ma thèse [9], puis poursuivi dans les années qui ont suivi [1],[11]. Il peut être vu comme une extension du modèle de mesures proposé pendant ma thèse [8]. Il consiste à définir une métrique d'espace de Hilbert à noyau reproduisant (RKHS pour Reproducing Kernel Hilbert Space) sur les espaces de m -formes différentielles puis à considérer l'espace dual (qui est donc un espace de *courants*) et sa norme associée. Cet espace de courants contient naturellement les représentants des courbes (pour le cas $m = 1$) ou surfaces ($m = 2$) orientées, et il est donc possible mathématiquement de comparer ces objets géométriques en exprimant la norme de leur différence. Or cette norme duale s'exprime de manière naturelle par une double intégrale sur les ensembles géométriques à comparer, double intégrale impliquant le noyau reproduisant, aboutissant à des algorithmes simples à mettre en œuvre. Les avantages de ce modèle et cette simplicité de mise en œuvre font qu'il a été très souvent utilisé pour les applications en recalage et en analyse de forme.

Modèles de cycles normaux Ce travail constitue le projet de thèse de Pierre Roussillon, que je co-encadre au MAP5 depuis septembre 2014. Le modèle basé sur les cycles normaux que nous avons proposé reprend le même schéma de construction que le modèle des courants, ou que le modèle des varifolds introduit récemment [CT13], mais permet d'encoder les informations de courbure dans la métrique, là où les courants et varifolds n'encodent que des informations d'ordre 1 (espaces tangents ou vecteurs normaux). L'idée du modèle est de se baser sur la notion de *cycle normal* en théorie géométrique de la mesure, qui correspond au courant associé au fibré normal unitaire d'un sous-ensemble de \mathbf{R}^d , défini en un sens généralisé. Le cycle normal est directement liée aux notions de mesures de courbure pour des sous-ensembles non réguliers ; il peut être vu en fait comme une généralisation de la notion de courbure en géométrie différentielle. Le fait que le modèle encode les courbures des formes se traduit en pratique notamment par une pondération forte des points extrémaux des courbes ou des bords des surfaces dans la métrique, devant permettre un meilleur recalage, ces points de forte courbure étant précisément souvent mal recalés par les méthodes utilisant les courants ou les varifolds. De plus ce modèle est particulièrement bien adapté au cas de courbes avec branchements, car il permet de la même façon de pondérer fortement ces points de branchements. Ces travaux ont fait l'objet d'un papier de conférence [12], et d'un article dans la revue SIIMS [3].

Chapitre 4 : Méthodes d'estimation de forme prototype

Ce chapitre s'inscrit dans le cadre des études de groupe en morphométrie. Une procédure courante lors de l'analyse d'une population consiste à utiliser une forme prototype que l'on compare ensuite à chaque individu de la base. Cette forme prototype peut notamment être estimée à partir de la population, ce qui amène à considérer des méthodes de calcul de forme moyenne. Ce chapitre présente ainsi deux méthodes de construction de forme prototype à partir d'une population. Ces méthodes, comme d'autres méthodes similaires écrites dans le cadre difféomorphique, s'inspirent de notions et d'algorithmes issus de la géométrie riemannienne classique : notions de moyenne de Fréchet sur une variété, ou autres notions de "centres", et algorithmes pour les calculer.

Méthode de co-recalage dans l'espace des mesures ou courants pour l'analyse d'une population de formes. Ce travail est issu d'une collaboration avec Sarang Joshi en 2006 [4]. La problématique est celle de l'obtention d'une forme moyenne au sein d'une population, dans le cadre LDDMM et en se plaçant dans le cadre des métriques à noyaux sur les mesures ou courants. Nous avons proposé une méthode de co-recalage adaptée de l'algorithme d'appariement simple et bénéficiant de l'avantage de plonger les objets géométriques dans un espace vectoriel. Schématiquement, la méthode permet de déterminer, connaissant n formes S_i (courbes ou surfaces), des difféomorphismes ϕ_i telles que les objets transportés $\phi_i(S_i)$ soient co-recalés (c'est-à-dire proches au sens de la métrique), permettant de considérer la collection de ces surfaces recalées comme une forme moyenne de la population, utilisable pour des études statistiques. A la différence des méthodes ultérieures d'estimation de prototype ([DPTA08, Dur10, MMTY08]), il s'agit d'une méthode "rétrograde", en ce qu'elle cherche à déformer les formes observées vers une forme moyenne et non pas l'inverse. Ceci rend cette méthode moins cohérente du point de vue de son interprétation statistique, mais elle a néanmoins été appliquée avec succès par la suite pour des problèmes réels. Elle est notamment à la base des travaux plus récents présentés dans les parties 5.2, 4.3, 5.1.

Méthode du barycentre itéré Ce travail a été mené en collaboration avec l'équipe Aramis (ex Cogimage) à l'Institut du Cerveau et de la Moelle épinière (ICM). Il constituait une partie du travail de thèse de Claire Cury, doctorante en co-direction avec Olivier Colliot (chef de l'équipe) et moi-même. La thèse de Claire portait sur l'analyse de la variabilité naturelle ou pathologique de l'hippocampe humain, structure cérébrale en lien avec la mémoire et fortement atteinte lors de la maladie d'Alzheimer. Nous avons proposé dans ce cadre une méthode rapide de calcul d'une forme prototype, appelée "barycentre itéré", consistant à effectuer des appariements successifs en partant d'une des formes de la base et en se déplaçant le long des géodésiques ainsi calculées (voir figure 4.3). L'idée n'est pas d'obtenir une moyenne exacte au sens de la moyenne de Fréchet, mais plutôt une forme positionnée dans une zone centrale (la distance d'un tel barycentre à la vraie moyenne dépend de la courbure dans l'espace des formes), en partant du principe que la forme prototype, qui sert de point de référence pour l'analyse statistique ultérieure, n'a pas besoin de correspondre exactement au centre de la population, car l'analyse statistique centrée sur une forme prototype est de toute manière imprécise dans la mesure où elle ne peut pas prendre en compte toute la géométrie de l'espace des formes. Ce travail et ses applications ont fait l'objet de plusieurs publications [5],[13, 14].

chapitre 5 : Études applicatives

Ce chapitre présente deux projets applicatifs issus de collaborations, l'un dans le domaine de l'imagerie cérébrale, et l'autre dans le domaine de l'audio.

Méthode de co-recalage du cerveau basé sur l'extraction automatiques des sillons corticaux Cette partie concerne le travail effectué en collaboration principalement avec le laboratoire LENA à l'hôpital Pitié-Salpêtrière, et qui constituait le travail de thèse de Guillaume Auzias. Il a mené à plusieurs publications dans des conférences [15, 16], ainsi qu'un article principal dans IEEE transactions on Medical Imaging en 2011 ([6]). La méthode DISCO (Diffeomorphic Sulcal-Based COrtical) permet un co-recalage global inter-individuel de surfaces corticales en utilisant l'information de positionnement des sillons corticaux, ayant été segmentés et labellisés automatiquement suivant la technique proposée dans [RMPO⁺02, PRTM09]. Du point de vue des modèles diffeomorphiques, il s'agit en fait d'une adaptation et d'une extension de l'algorithme de la méthode de co-recalage sur les mesures ou courants présentée au chapitre 4, utilisant un grand nombre de termes d'attache (correspondant à chaque sillon labellisé) et de natures différentes (sillons et surface corticale). Cette étude a montré que l'adjonction de connaissances anatomiques (sous la forme de contraintes) permettait d'améliorer les techniques de recalage basées uniquement sur les images brutes.

Étude morphométrique de l'oreille humaine pour l'individualisation audio Cette partie résume une collaboration commencée en 2011 avec l'équipe CARLab (Computing and Audio Research Laboratory) à l'Université de Sydney, sur un projet de recherche en audio. Le contexte applicatif est celui de l'individualisation du son transmis par les casques audio, dans le but d'améliorer la qualité de restitution spatiale, le point central étant d'arriver à établir une caractérisation du lien entre la forme de l'oreille externe (qui filtre le son arrivant au tympan) et les fonctions de transfert HRIR (head-related impulse response) qui modélisent ce filtrage. Dans ce but nous avons tout d'abord utilisé les modèles diffeomorphiques d'analyse de forme pour modéliser la variabilité anatomique de l'oreille externe au sein d'une population et extraire des modes principaux de variation. D'un point de vue méthodologique, cette étude nous a amené à

proposer des nouveaux algorithmes multi-échelles pour l'estimation de prototype. Ce travail a abouti pour le moment à trois articles de conférence [17, 18, 19].

chapitre 6 : Perspectives

Le dernier chapitre présente très brièvement quelques pistes de recherche, certaines issues de projets en cours.

Principaux travaux présentés dans ce mémoire

- [1] Joan Glaunès, Anqi Qiu, Michael Miller, and Laurent Younes. Large deformation diffeomorphic metric curve mapping. *International Journal of Computer Vision*, 80(3) :317–336, December 2008.
- [2] Mario Micheli and Joan A. Glaunès. Matrix-valued kernels for shape deformation analysis. *Geometry, Imaging and Computing*, 1(1) :57–139, 2014.
- [3] Pierre Roussillon and Joan Alexis Glaunès. Kernel Metrics on Normal Cycles and Application to Curve Matching. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 9(4) :1991–2038, December 2016.
- [4] Joan Glaunès and Sarang Joshi. Template estimation from unlabeled point set data and surfaces for computational anatomy. In X. Pennec and S. Joshi, editors, *Proc. of the International Workshop on the Mathematical Foundations of Computational Anatomy (MFCA-2006)*, pages 29–39, 1st of October 2006.
- [5] Claire Cury, Joan Alexis Glaunès, and Olivier Colliot. Diffeomorphic Iterative Centroid Methods for Template Estimation on Large Datasets. In Frank Nielsen, editor, *Geometric Theory of Information*, volume Chapter 4. Springer, 2014.
- [6] G. Auzias, O. Colliot, J. A. Glaunes, M. Perrot, J. F. Mangin, A. Trouve, and S. Baillet. Diffeomorphic brain registration under exhaustive sulcal constraints. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 30(6) :1214–1227, June 2011.

Autres travaux mentionnés

- [7] Joan Glaunès, Marc Vaillant, and Michael I. Miller. Landmark matching via large deformation diffeomorphisms on the sphere. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 20 :170–200, 2004.
- [8] Joan Glaunès, Alain Trouvé, and Laurent Younes. Diffeomorphic matching of distributions : A new approach for unlabelled point-sets and sub-manifolds matching. *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2 :712–718, 2004.
- [9] Marc Vaillant and Joan Glaunès. Surface Matching via Currents. In Gary E. Christensen and Milan Sonka, editors, *Information Processing in Medical Imaging*, number 3565 in Lecture Notes in Computer Science, pages 381–392. Springer Berlin Heidelberg, 2005.
- [10] Viviana Siless, Joan Glaunès, Pamela Guevara, Jean-François Mangin, Cyril Poupon, Denis Bihan, Bertrand Thirion, and Pierre Fillard. Joint t1 and brain fiber log-demons registration using currents to model geometry. In Nicholas Ayache, Hervé Delingette, Polina Golland, and Kensaku Mori, editors, *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention - MICCAI 2012*, volume 7511 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 57–65. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [11] Marc Vaillant, Anqi Qiu, Joan Glaunès, and Michael I. Miller. Diffeomorphic metric surface mapping in subregion of the superior temporal gyrus. *NeuroImage*, 34(3) :1149 – 1159, 2007.
- [12] Pierre Roussillon and Joan Alexis Glaunès. Kernel Metrics on Normal Cycles and Application to Curve Matching. In *MFCA 2015 : 5th MICCAI workshop on Mathematical Foundations of Computational Anatomy*, Munich, Germany, October 2015.
- [13] Claire Cury, Joan A. Glaunès, and Olivier Colliot. Template estimation for large database : A diffeomorphic iterative centroid method using currents. In Frank Nielsen and Frédéric Barbaresco, editors, *Geometric Science of Information*, volume 8085 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 103–111. Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [14] Claire Cury, Joan Alexis Glaunès, Marie Chupin, and Olivier Colliot. Fast Template-based Shape Analysis using Diffeomorphic Iterative Centroid. In Constantino Carlos Reyes-Aldasoro and Greg Slabaugh, editors, *MIUA 2014 - Medical Image Understanding and Analysis 2014*, pages 39–44, Egham, United Kingdom, July 2014.
- [15] Guillaume Auzias, Joan Glaunes, Arnaud Cachia, Pascal Cathier, Eric Bardinet, Olivier Colliot, Jean-Francois Mangin, Alain Trouvé, and Sylvain Baillet. Multi-scale diffeomorphic cortical registration under manifold sulcal constraints. In *ISBI*, pages 1127–1130. IEEE, 2008.
- [16] Guillaume Auzias, Joan Glaunes, Olivier Colliot, Matthieu Perrot, Jean-François Mangin, Alain Trouvé, and Sylvain Baillet. Disco : A coherent diffeomorphic framework for brain registration under exhaustive sulcal constraints. In Guang-Zhong Yang, David J. Hawkes,

- Daniel Rueckert, J. Alison Noble, and Chris J. Taylor 0002, editors, *MICCAI (1)*, volume 5761 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 730–738. Springer, 2009.
- [17] R. Zolfaghari, N. Epain, C. T. Jin, J. Glaunès, and A. Tew. Large deformation diffeomorphic metric mapping and fast-multipole boundary element method provide new insights for binaural acoustics. In *2014 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pages 2863–2867, May 2014.
- [18] R. Zolfaghari, N. Epain, C. T. Jin, A. Tew, and J. Glaunès. A multiscale lddmm template algorithm for studying ear shape variations. In *Signal Processing and Communication Systems (ICSPCS), 2014 8th International Conference on*, pages 1–6, Dec 2014.
- [19] R. Zolfaghari, N. Epain, C. T. Jin, J. Glaunès, and A. Tew. Generating a morphable model of ears. In *2016 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pages 1771–1775, March 2016.
- [20] Joan Glaunès. *Transport par difféomorphismes de points, de mesures et de courants pour la comparaison de formes et l'anatomie numérique*. PhD thesis, Université Paris 13, France, September 2005.

Le modèle difféomorphique et la méthode du tir géodésique pour les problèmes discretisés

Je présente dans ce chapitre tout d'abord un rappel de la construction du modèle difféomorphique et de la métrique qu'il induit sur l'espace des landmarks, c'est-à-dire l'espace de n points distincts dans \mathbf{R}^d . Je présente ensuite une formulation générale des problèmes variationnels écrits sur cet espace et de leur résolution numérique basée sur la méthode du tir géodésique. Ceci constitue le cœur de la machinerie algorithmique utilisée pour tous les résultats qui seront présentés par la suite.

1.1 Difféomorphismes et géodésiques

1.1.1 Modèle difféomorphique pour la comparaison de formes

Je présente dans cette partie quelques rappels sur la formulation mathématique du modèle difféomorphique. On pourra citer les références suivantes sur ce modèle. D'abord les premiers travaux : [Tro95, You98, CRM96, DGM98] sur le modèle théorique, [BMTY05, JM00] pour les premiers algorithmes d'appariement. Pour la partie concernant les équations géodésiques et la méthode du tir géodésique, les références initiales sont [VMYT04, MTY06]. Enfin pour un traitement plus complet et plus récent, on renvoie à [MTY02, MY01, You10], ainsi qu'à [ATY15] pour une approche liée à la théorie du contrôle.

Le modèle LDDMM consiste en une construction mathématique de groupes de difféomorphismes d'un domaine à partir de la définition d'une métrique locale hilbertienne sur les champs de vecteurs définis sur ce domaine. Notons Ω le domaine (ouvert d'une variété dans le cadre le plus général), et V l'espace de Hilbert de champs de vecteurs ainsi défini, alors sous certaines conditions de régularité sur les éléments de V et de décroissance à l'infini, l'ensemble des flots au temps 1 des champs de vecteurs dépendant du temps $(v(t, \cdot))_{t \in [0,1]} \in L^2([0,1], V)$ forment un groupe de difféomorphismes muni d'une métrique invariante à droite.

1.1.2 Cadre mathématique du modèle difféomorphique

Plus précisément, les difféomorphismes sont obtenus par intégration de champs de vecteurs dépendant du temps : si $v(\cdot, \cdot) : [0, 1] \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$, $(t, x) \mapsto v(t, x)$ est une telle famille de champs

de vecteurs, alors pour toute position initiale $x \in \mathbf{R}^d$, on peut considérer le système d'équations différentielles (ODE) suivant dans \mathbf{R}^d :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}q(t) = v(t, q(t)) \\ q(0) = x. \end{cases} \quad (1.1)$$

Sous certaines conditions sur la famille de champs $(v(t, \cdot))_{t \in [0,1]}$ que nous précisons juste après, il existe une unique solution $x(t)$ à cette ODE et on note $\phi^v(t, x) := q(t)$. Ceci définit, pour tout $t \in [0, 1]$, un difféomorphisme $\phi^v(t, \cdot) : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$.

La régularité des champs $v(t, \cdot)$ est mesurée par une norme de Hilbert sur les champs de vecteurs. Plus précisément, on suppose qu'on a défini un espace de Hilbert $(V, \|\cdot\|_V)$, de champs de vecteurs $\mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$, tel que V s'injecte continûment dans l'espace $C_0^1(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d)$ (espace des champs de vecteurs $v : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$ de classe C^1 , tels que v et ses dérivées partielles tendent vers 0 à l'infini). Cette condition est nommée 1-admissibilité de V . Alors on montre que toute famille de champs $v(\cdot, \cdot) \in L^2([0, 1], V)$ génère via (1.1) une famille de difféomorphismes $\phi^v(\cdot, \cdot)$ de classes C^1 . De plus l'ensemble des difféomorphismes ainsi généré $\mathcal{A}_V = \{\phi^v(1, \cdot), v \in L^2([0, 1], V)\}$ est pourvu d'une structure de groupe et d'une métrique invariante à droite en posant

$$\forall \phi, \psi \in \mathcal{A}_V, \quad d(\phi, \psi) = \inf \left\{ \int_0^1 \|v(t, \cdot)\|_V dt, v \in L^2([0, 1], V), \phi^v(1, \cdot) = \psi \circ \phi^{-1} \right\}.$$

1.1.3 Actions de groupes et espaces de formes

L'idée générale du modèle difféomorphique est d'interpréter tout ou partie des différences entre les formes observées comme induites par des déformations de l'espace ambiant. Par conséquent, une fois défini l'espace des déformations, il convient de préciser le modèle de forme étudié et l'action des déformations sur ces formes. Le cas le plus simple est celui d'une liste de n points distincts, correspondant par exemple au cas où des points de référence en correspondance ont été repérés sur chacune des images anatomiques. Dans ce cas l'espace des formes étudié est donc $\mathcal{L}^n(\mathbf{R}^d) := \{(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbf{R}^d)^n, i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j\}$, appelé *espace des landmarks*, et l'action est simplement

$$\begin{cases} (\mathcal{A}_V, \mathcal{L}^n(\mathbf{R}^d)) \rightarrow \mathcal{L}^n(\mathbf{R}^d) \\ (\phi, x) \mapsto \phi.x = (\phi(x_i))_{1 \leq i \leq n}. \end{cases}$$

De la même façon on peut considérer l'action sur des sous-variétés, ou plus généralement n'importe quel sous-ensemble de \mathbf{R}^d :

$$\begin{cases} (\mathcal{A}_V, \mathcal{P}(\mathbf{R}^d)) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{R}^d) \\ (\phi, A) \mapsto \phi(A), \end{cases}$$

ou encore l'action sur les images (vues comme fonctions $I : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$) :

$$\begin{cases} (\mathcal{A}_V, \mathcal{F}(\mathbf{R}^d, \mathbf{R})) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}) \\ (\phi, I) \mapsto I \circ \phi^{-1}. \end{cases}$$

Enfin citons l'action sur les mesures de Radon de \mathbf{R}^d , définies par dualité de l'action sur les ensembles :

$$\begin{cases} (\mathcal{A}_V, \mathcal{M}(\mathbf{R}^d)) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbf{R}^d) \\ (\phi, \mu) \mapsto (A \mapsto \mu(\phi(A))). \end{cases}$$

A cette action globale correspond également une action infinitésimale induite par les champs de vecteurs $v \in V$ sur l'espace tangent à une forme donnée, lorsque celui-ci existe.

Dans ce chapitre et plus généralement dans tout ce mémoire nous allons principalement considérer le cas de l'action sur l'espace des landmarks. Un point essentiel à comprendre est que ceci ne signifie absolument pas que nous nous limitons dans les applications à des problèmes d'appariement de points en correspondance. En fait, comme nous le verrons un peu plus loin, pour la plupart des modèles les objets géométriques une fois discrétisés se retrouvent paramétrés par un nombre fini de points, et on considère l'action des déformations sur les objets induite par l'action sur ces points. Par exemple dans le cas d'une surface $S \subset \mathbf{R}^3$, on considérera une surface triangulée \tilde{S} comme approximation discrète, et l'image $\phi(S)$ de la surface sous l'action d'un difféomorphisme ϕ sera approchée par la surface triangulée obtenue en déplaçant les sommets de la triangulation, tout en gardant la même connectivité. L'objet géométrique, du point de vue du modèle difféomorphe, reste bien alors une liste ordonnée de points distincts.

Une fois précisé ces données, il est possible d'étudier la structure métrique induite sur l'espace des formes par cette action de groupe. Autrement dit la métrique sur \mathcal{A}_V détermine par projection une métrique sur l'espace des formes, à la fois globalement et sur l'espace tangent.

1.1.4 Problèmes d'appariement, principes de réduction et implications sur les approches algorithmiques

On problème d'appariement simple dans ce cadre s'écrit généralement comme un problème de minimisation d'une fonctionnelle composée du terme d'énergie et d'un terme d'attache aux données :

$$\mathcal{J}(v) = \gamma E(v) + \mathcal{A}(\phi(1, \cdot)),$$

où $E(v) = \int_0^1 \|v(t, \cdot)\|_V^2 dt$, et \mathcal{A} est une fonction dépendant des données à appairer. Par exemple pour le cas le plus simple de l'appariement entre deux ensembles de points en correspondance $(x_i)_{1 \leq i \leq n}, (y_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbf{R}^d)^n$, on choisira

$$\mathcal{A}(\phi(1, \cdot)) = \sum_{i=1}^n \|\phi(1, x_i) - y_i\|^2.$$

Pour la comparaison d'autres types de données (images, ou sous-variétés), on dispose d'autres fonctionnelles d'attache aux données adaptées. Le paramètre $\gamma > 0$ permet de régler l'équilibre entre régularité de la déformation et précision de l'appariement.

1.1.5 Problème d'appariement simple dans le cadre discret

Supposons à présent que l'on veuille effectuer un appariement entre deux objets géométriques. Comme on vient de l'évoquer dans un grand nombre de situations les objets géométriques sont discrétisés par un nombre fini de points x^i , $1 \leq i \leq n$, et donc nous considérons une fonctionnelle d'appariement du type

$$\mathcal{J}(v) = \gamma \int_0^1 \|v(t, \cdot)\|_V^2 dt + A((\phi^v(1, x^i))_{1 \leq i \leq n}),$$

où A est le terme d'attache aux données. Le point important ici est que le terme d'attache aux données dépend de v uniquement à travers les positions $\phi^v(1, x^i)$.

1.1.6 Première réduction et paramétrisation à l'aide de vecteurs moment dépendant du temps

La fonctionnelle J est définie pour tout $v \in L^2([0, 1], V)$. Un résultat fondamental dit que parmi tous ces champs v , ceux qui minimisent la fonctionnelle J prennent la forme

$$v(t, x) = \sum_{i=1}^n K(x, q^i(t)) p^i(t), \quad (1.2)$$

où K est le noyau reproduisant de V , $q^i(t) = \phi^v(t, x^i)$ sont les trajectoires des points x^i , et $p^i(t) \in \mathbf{R}^d$ sont appelés vecteurs moments. On peut remarquer que ceci n'est défini qu'implicitement car on doit connaître $v(t, \cdot)$ pour définir $q^i(t)$, qui à son tour définit $v(t, \cdot)$. Nous devons donc être plus précis afin de caractériser de tels champs de vecteurs. Notons tout d'abord que si nous écrivons l'équation (1.2) en $x = x^i$ pour $1 \leq i \leq n$, on obtient les équations

$$\forall 1 \leq i \leq n, \begin{cases} \partial_t q^i(t) = \sum_{j=1}^n K(q^i(t), q^j(t)) p^j(t) \\ q^i(0) = x^i, \end{cases}$$

qui peuvent être écrites sous forme compacte à l'aide de notations matricielles :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}(t) = K(\mathbf{q}(t), \mathbf{q}(t)) \mathbf{p}(t) \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{x}. \end{cases} \quad (1.3)$$

Ceci peut être vu soit comme une famille de systèmes d'équations linéaires à résoudre pour chaque temps $t \in [0, 1]$, afin de calculer $\mathbf{p}(t)$ à partir de $\mathbf{q}(t)$, où comme un système d'équations différentielles ordinaires (ODE) pouvant être intégré pour obtenir $\mathbf{p}(t)$ à partir de $\mathbf{q}(t)$. Ainsi nous voyons que partant soit des trajectoires $q^i(t)$, soit des vecteurs moments $p^i(t)$, on obtient les deux en résolvant ces équations, et ensuite $v(t, \cdot)$ est défini par (1.2). De plus, nous savons que pour de tels champs de vecteurs,

$$\|v(t, \cdot)\|_V^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle p^i(t), K(q^i(t), q^j(t)) p^j(t) \rangle = \langle \mathbf{p}(t), K(\mathbf{q}(t), \mathbf{q}(t)) \mathbf{p}(t) \rangle.$$

Aussi nous pouvons réécrire la fonctionnelle \mathcal{J} , pour toute famille de champs v de la forme 1.2, comme une fonction des vecteurs moments $p^i(t)$ seulement :

$$\mathcal{J}(v) = \tilde{\mathcal{J}}(\mathbf{p}) := \gamma \int_0^1 \langle \partial(t), K(\mathbf{q}(t), \mathbf{q}(t)) \mathbf{p}(t) \rangle dt + A(\mathbf{q}(1)), \quad (1.4)$$

où $\mathbf{q}(t)$ est défini comme solution de l'ODE (1.3). De manière équivalente, comme

$$\langle \mathbf{p}(t), K(\mathbf{q}(t), \mathbf{q}(t)) \mathbf{p}(t) \rangle = \langle \dot{\mathbf{q}}(t), K(\mathbf{q}(t), \mathbf{q}(t))^{-1} \dot{\mathbf{q}}(t) \rangle,$$

\mathcal{J} peut aussi être réécrit comme une fonction des trajectoires $q^i(t)$:

$$\mathcal{J}(v) = \hat{\mathcal{J}}(\mathbf{q}) := \gamma \int_0^1 \langle \dot{\mathbf{q}}(t), K(\mathbf{q}(t), \mathbf{q}(t))^{-1} \dot{\mathbf{q}}(t) \rangle dt + A(\mathbf{q}(1)). \quad (1.5)$$

En pratique la paramétrisation à l'aide de vecteurs moments est préférée car elle ne demande pas de résoudre un quelconque système linéaire.

Cette écriture de la fonctionnelle se prête à une méthode numérique d'optimisation en fixant une discrétisation temporelle $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_T = 1$, de sorte que l'espace des variables

sur lesquelles l'optimisation s'effectue est celui des vecteurs moments discrétisés en temps, donc \mathbf{R}^{dnT} . Elle était à la base des premiers algorithmes d'appariement et est toujours parfois préférée à la méthode de tir géodésique que nous présentons dans la partie suivante. Cependant elle impose de fixer une méthode d'intégration des ODEs avec pas non adaptatif, et limite les méthodes d'optimisation utilisées à des méthodes de descente "à petits pas", et donc sans recherche linéaire (linesearch) par exemple, car il est exclus de modifier arbitrairement les variables moment tout en garantissant une borne sur l'erreur des intégrations des ODEs.

1.1.7 Equations géodésiques et paramétrisation à l'aide des vecteurs moments initiaux

Un deuxième résultat dit que parmi les champs de vecteurs de la forme (1.2), ceux qui minimisent \mathcal{J} satisfont des ODEs additionnelles sur les vecteurs moments. En fait le premier terme de l'équation (1.5) correspond exactement à l'énergie de la trajectoire $(\mathbf{q}(t))_{t \in [0,1]}$ pour la métrique riemannienne définie en chaque point $\mathbf{x} \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^d)$ par la matrice $K(\mathbf{x}, \mathbf{x})^{-1}$. La façon simple de comprendre ceci est de premièrement voir ce qui se passe si la matrice est la matrice identité (ce qui est le cas quand l'échelle du noyau K tend vers 0). Dans un tel cas l'équation (1.5) s'écrit

$$\hat{J}(\mathbf{q}) = \gamma \int_0^1 \|\dot{\mathbf{q}}(t)\|^2 dt + A(\mathbf{q}(1)),$$

et les trajectoires minimisantes sont des lignes droites car les lignes droites sont les trajectoires qui minimisent l'énergie $\int_0^1 \|\dot{\mathbf{q}}(t)\|^2 dt$, i.e. les lignes droites sont les géodésiques pour la métrique euclidienne. En revenant à présent au cas général de l'équation (1.5), nous voyons que les trajectoires doivent vérifier les équations géodésiques pour la métrique non-euclidienne donnée par la matrice $K(\mathbf{x}, \mathbf{x})^{-1}$.

De telles équations peuvent s'obtenir à partir d'une formulation hamiltonienne, car elles correspondent au mouvement d'un corps libre pour cette métrique particulière : le lagrangien correspondant s'écrit (à partir de maintenant nous omettons la dépendance en t dans les notations)

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, K(\mathbf{q}, \mathbf{q})^{-1} \dot{\mathbf{q}} \rangle$$

et nous avons

$$\mathbf{p} = K(\mathbf{q}, \mathbf{q})^{-1} \dot{\mathbf{q}}.$$

Le Hamiltonien s'écrit

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{p}, K(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \mathbf{p} \rangle.$$

Les équations géodésiques sont données par

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}} = -\nabla_{\mathbf{q}} H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \\ \dot{\mathbf{q}} = \nabla_{\mathbf{p}} H(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \end{cases}$$

ou encore sous forme condensée $\dot{\mathbf{X}} = F(\mathbf{X}) := R \nabla H(\mathbf{X})$, où $\mathbf{X} = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$ et R désigne l'opérateur de rotation $R(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (-\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Dans notre cas ceci donne

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}} = -\frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{q}} \langle \mathbf{p}, K(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \mathbf{p} \rangle \\ \dot{\mathbf{q}} = K(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \mathbf{p}. \end{cases} \quad (1.6)$$

Ce système d'ODEs peut être résolu pour n'importe quelles conditions données par des positions initiales $\mathbf{q}(0)$ et des moments initiaux $\mathbf{p}(0)$ ou des vitesses initiales $\dot{\mathbf{q}}(0)$. On note Φ^F le flot de l'application F , de sorte que $\mathbf{X}(t) = \Phi_{0t}^F(\mathbf{X}(0))$.

Ainsi finalement la fonctionnelle \mathcal{J} se réécrit in fine pour des trajectoires optimales comme une fonction des vecteurs moments initiaux

$$\hat{J}(\mathbf{q}) = J(\mathbf{p}(0)) := \gamma \int_0^1 \langle \mathbf{p}, K(\mathbf{q}, \mathbf{q})\mathbf{p} \rangle dt + A(\mathbf{q}(1)),$$

où \mathbf{p}, \mathbf{q} satisfont les équations géodésiques (notons qu'on pourrait de façon équivalente écrire le problème comme fonction de la vitesse initiale $\dot{\mathbf{q}}(0)$). De plus nous savons que le hamiltonien $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ est invariant, ce qui signifie que $\langle \mathbf{p}, K(\mathbf{q}, \mathbf{q})\mathbf{p} \rangle$ est constant au cours du temps. Aussi nous pouvons éliminer l'intégrale dans la formule :

$$J(\mathbf{p}(0)) = \gamma \langle \mathbf{p}(0), K(\mathbf{q}(0), \mathbf{q}(0))\mathbf{p}(0) \rangle + A(\mathbf{q}(1)). \quad (1.7)$$

On voit ici qu'on se retrouve donc avec un problème de contrôle optimal, où on cherche à optimiser par rapport à la condition initiale d'un système dynamique une fonctionnelle dépendant de son état en différents instants (ici $t = 0$ et $t = 1$), avec pour particularité ici que seul $\mathbf{p}(0)$ est contrôlable, alors que $\mathbf{q}(0)$ est fixé, mais on verra dans la partie suivante que dans d'autres situations on est amené à optimiser aussi les positions initiales. Une procédure d'optimisation d'une telle fonctionnelle demandera en général le calcul de son gradient, ce qui implique la détermination de la transposée de la différentielle de l'application flot. Celle-ci correspond au flot du système d'ODEs linéaires obtenu par différentiation de $\dot{\mathbf{X}} = F(\mathbf{X})$, c'est-à-dire le système $\dot{\tilde{\mathbf{X}}} = DF(\mathbf{X})\tilde{\mathbf{X}}$, ce qui donne donc $\dot{\tilde{\mathbf{X}}} = RH_H(\mathbf{X})\tilde{\mathbf{X}}$, où $H_H(\mathbf{X})$ désigne la hessienne du hamiltonien. Dans notre cas on a

$$H_H(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\partial_{\mathbf{q}}^2 \langle \mathbf{p}, K(\mathbf{q}, \mathbf{q})\mathbf{p} \rangle & \partial_{\mathbf{q}} [K(\mathbf{q}, \mathbf{q})\mathbf{p}]^T \\ \partial_{\mathbf{q}} [K(\mathbf{q}, \mathbf{q})\mathbf{p}] & K(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \end{pmatrix}.$$

Le passage à la transposée revient alors à calculer le flot de $-DF(\mathbf{X})^T$, soit le système d'ODEs $\dot{\boldsymbol{\eta}} = H_H(\mathbf{X})R\boldsymbol{\eta}$ (puisque $H_H(\mathbf{X})$ est symétrique et $R^T = -R$). On obtient ainsi les équations adjointes suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\eta}}_p = \partial_{\mathbf{q}} [K(\mathbf{q}, \mathbf{q})\mathbf{p}] \boldsymbol{\eta}_p - K(\mathbf{q}, \mathbf{q})\boldsymbol{\eta}_q \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_q = \frac{1}{2}\partial_{\mathbf{q}}^2 \langle \mathbf{p}, K(\mathbf{q}, \mathbf{q})\mathbf{p} \rangle \boldsymbol{\eta}_p - (\partial_{\mathbf{q}} [K(\mathbf{q}, \mathbf{q})\mathbf{p}])^T \boldsymbol{\eta}_q. \end{cases} \quad (1.8)$$

Ces équations sont appelées équations adjointes rétrogrades car il est nécessaire de les intégrer du temps $t = 1$ au temps $t = 0$ afin de transférer le gradient du terme d'attache au donnée final sur la condition initiale $\mathbf{X}(0)$.

1.2 Un problème d'appariement générique multi-difféomorphismes, multi-cibles, multi-temps

Les équations obtenues dans le paragraphe précédent peuvent être utilisées pour traiter des problèmes plus généraux. On peut tout d'abord considérer que le terme d'attaches aux données est composé de plusieurs termes correspondant à des structures géométriques composites [DPC⁺14]. Cette situation est courante dans les applications médicales, où des éléments anatomiques de différents types sont extraits des images et utilisés pour guider la mise en correspondance.

D'autre part on peut faire dépendre le terme d'attache de l'état du système non pas seulement au temps $t = 1$ mais en plusieurs instants sur l'intervalle $[0, 1]$, et supposer que l'on cherche à optimiser aussi les positions initiales $\mathbf{q}(0)$, ce qui amène donc à un problème de la forme :

$$f(\mathbf{X}(0)) = \gamma \langle \mathbf{p}(0), K(\mathbf{q}(0), \mathbf{q}(0))\mathbf{p}(0) \rangle + \mathcal{A}(\mathbf{X}(t_1), \dots, \mathbf{X}(t_m)),$$

avec $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m \leq 1$, ou encore de manière plus synthétique :

$$f(\mathbf{X}(0)) = \mathcal{A}(\mathbf{X}(t_1), \dots, \mathbf{X}(t_m)),$$

si l'on considère que le terme d'énergie est intégré à la fonction \mathcal{A} (avec donc $t_1 = 0$). Sous cette forme générale le problème devient alors un problème de régression géodésique [DFBJ10] utile pour les analyses longitudinales. Même si l'on évoquera peu ces problématiques dans la suite de ce mémoire, il est important de souligner que cette extension du modèle d'appariement simple peut s'intégrer sans peine dans un algorithme de tir géodésique.

Enfin on peut de plus considérer un problème couplant plusieurs systèmes dynamiques $\mathbf{X}^k = (\mathbf{p}^k, \mathbf{q}^k)$, $1 \leq k \leq N$, obéissants à des équations de la forme précédente, correspondant donc à N difféomorphismes. Ceci correspond à la problématique centrale de l'analyse de groupe en morphométrie, où l'on cherche à estimer conjointement une forme prototype et les difféomorphismes reliant ce prototype aux formes observées (voir chapitre 4). Si on note $\mathcal{X} = (\mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^N)$, on obtient ainsi la formulation très générale suivante :

$$f(\mathcal{X}(0)) = \mathcal{A}(\mathcal{X}(t_1), \dots, \mathcal{X}(t_m)).$$

Le gradient d'une telle fonctionnelle est obtenu par intégration rétrograde des équations adjointes 1.8 successivement pour chaque système dynamique \mathbf{X}^k , en collectant au fur et à mesure les gradients successifs $\nabla_{\mathbf{X}^k(t_m)}\mathcal{A}, \dots, \nabla_{\mathbf{X}^k(t_1)}\mathcal{A}$. Plus précisément, on a

$$\nabla f(\mathcal{X}(0)) = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^m (\partial_{\mathbf{X}^k(0)}\mathbf{X}^k(t_i))^T \nabla_{\mathbf{X}^k(t_i)}\mathcal{A},$$

et donc

$$\nabla f(\mathcal{X}(0)) = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^m \boldsymbol{\eta}_i^k(0)$$

où chaque $\boldsymbol{\eta}_i^k(t)$ est solution de l'équation

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\eta}}_i^k(t) = DF(\mathbf{X}^k(t))^T \boldsymbol{\eta}_i^k(t), \\ \boldsymbol{\eta}_i^k(t_i) = \nabla_{\mathbf{X}^k(t_i)}\mathcal{A}. \end{cases}$$

Les algorithmes 1 et 2 montrent le schéma de calcul d'une telle fonctionnelle et de son gradient.

Algorithme 1 Algorithme : calcul de la fonctionnelle

- 1: **function** FUNC($X(0)$)
 - 2: Calcul de $X(t_1), \dots, X(t_m)$ par intégration de l'équation 1.6 de $t = 0$ à $t = 1$.
 - 3: $J \leftarrow A(X_{t_1}, \dots, X_{t_m})$.
 - 4: **Retourne** J
 - 5: **fin function**
-

Remarquons que pour les deux algorithmes l'étape 2 peut être réalisée en m intégrations successives de t_{i-1} à t_i pour $1 \leq i \leq m$, ou bien en une seule étape, suivie de l'interpolation de la solution aux temps t_i , $1 \leq i \leq m$. D'autre part pour l'étape 6 il est aussi nécessaire de fournir à l'intégrateur un moyen d'évaluer la solution $X(t)$ calculée à l'étape 2 à n'importe quel instant t .

Algorithme 2 Algorithme : calcul du gradient de la fonctionnelle

```

1: function GRADFUNC( $X(0)$ )
2:   Calcul de  $X(t_1), \dots, X(t_m)$  par intégration de l'équation 1.6 de  $t = 0$  à  $t = 1$ .
3:    $\beta(t_m) \leftarrow 0$ .
4:   Pour  $i = m$  à 1 Faire
5:      $\beta(t_i) \leftarrow \beta(t_i) + \nabla_i A(X(t_1), \dots, X(t_m))$ .
6:     Calcul de  $\beta(t_{i-1})$  par intégration de l'équation 1.8 de  $t = t_i$  à  $t = t_{i-1}$ .
7:   fin Pour
8:    $G \leftarrow \beta(0)$ .
9:   Retourne  $G$ 
10: fin function

```

1.2.1 Choix des méthodes numériques pour l'intégration des équations différentielles et l'optimisation

Les méthodes d'appariement ou de calculs de prototype dans le cadre difféomorphique nécessitent l'utilisation d'outils numériques classiques. Principalement, il faut choisir :

1. pour le calcul de la fonctionnelle et de son gradient : une méthode d'intégration numérique pour les équations différentielles hamiltoniennes sur les variables $p(0)$ et $q(0)$ 1.6, ainsi que les équations adjointes rétrogrades 1.8.
2. un algorithme d'optimisation non linéaire basé sur le calcul de la fonctionnelle et de son gradient.
3. facultatif, mais indispensable pour les applications sur données réelles : une méthode de calcul rapide des convolutions par les noyaux.

Sur ces trois points il est possible d'utiliser et de comparer des méthodes classiques de résolution. De ce point de vue l'algorithme de tir géodésique présenté auparavant présente l'avantage décisif de permettre de dissocier dans le code les méthodes numériques de résolution des ODE et d'optimisation et donc de pouvoir faire appel à des codes externes sur ces trois points.

Pour ces choix, il faut garder à l'esprit que l'optimisation et les intégrations sont effectuées sur des variables de très grandes dimensions. Les variables $p(0)$ et $q(0)$ sont chacune de dimension $d \times n$, où d est la dimension de l'espace et n le nombre de points de contrôle, et donc la méthode de tir géodésique nécessite, pour chaque évaluation de la fonctionnelle, la résolution numérique d'un système d'ODEs de taille potentiellement très grande (plus précisément $2dn$ où $d = 2$ ou 3 et n est le nombre de points discrétisant la forme, typiquement de l'ordre de 10^3 à 10^4 pour des applications réelles sur des données de surfaces triangulées). De même, pour le calcul du gradient, il est nécessaire de résoudre un système d'ODEs linéaires de dimension $4dn$.

La plupart des résultats présentés dans ce mémoire utilisent la fonction `ode45` de Matlab pour la résolution des ODE. Il s'agit donc d'une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 avec pas adaptatif. Un choix a priori moins coûteux et souvent utilisé est celui de la règle trapézoïdale qui présente un bon compromis entre rapidité et précision. La question cependant est de savoir si une méthode moins précise ne risque pas de pénaliser au final la convergence de la méthode globale d'optimisation.

Les couplages entre les variables de ces système d'ODEs correspondent à des calculs de convolution par les noyaux, ce qui donne donc un coût de l'ordre de n^2 . Pour des applications réelles il est donc quasiment indispensable d'accélérer ces convolutions. Des méthodes de type Multipôles Rapides ou basés sur la transformée de Fourier rapide (en transférant les variables sur des grilles

bi ou tri-dimensionnelles) sont utilisées, mais en pratique le codage direct des convolutions parallélisées sur carte graphique reste plus rapide pour une large gamme de dimensions. Une telle parallélisation sur carte graphique est utilisée dans la plupart des applications sur données réelles.

Si l'on considère à présent le problème d'optimisation global, sa dimension peut aller de $D = d \times n$ (pour l'appariement simple) à $D = d \times n \times (N + 1)$ (calcul de prototype, avec N le nombre d'individus dans la population). De ce fait il est a priori hors de question d'utiliser des méthodes d'optimisation du type Newton ou quasi-Newton impliquant le calcul exact ou approché de la matrice hessienne de la fonctionnelle de façon explicite (i.e. stockée en mémoire). La méthode L-BFGS (Limited-memory Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno) [LN89] présente l'avantage d'éviter ce stockage et de rester à l'ordre D en coût mémoire.

1.3 Exemples numériques

Pour illustrer l'algorithme de tir géodésique, je montre ici quelques exemples numériques réalisés sur des données de chiffres 3 manuscrits. Ceux-ci sont donnés sous forme de nuages de points correspondant aux positions des pixels sélectionnés par seuillage sur des images photographiques d'origine. Le terme d'attache aux données correspond ici à la méthode des mesures [8] qui peut être vue comme le cas 0-dimensionnel de la méthodes des courants qui sera présentée au chapitre 3.

La figure 1.1 montre un exemple d'appariement simple, la figure 1.2 un exemple de régression géodésique, et la figure 1.3 un exemple d'estimation de forme prototype.

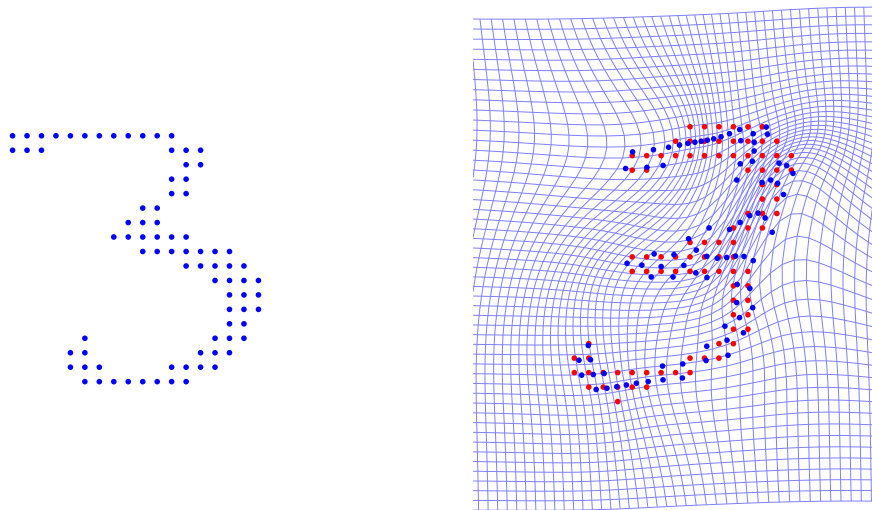


FIGURE 1.1 – Appariement simple sur des données de chiffres 3 manuscrits donnés sous forme de nuages de points. La figure de gauche montre la forme source. À droite : forme cible en rouge, forme source déformée (points bleus) et déformation d’une grille régulière sous l’action de la transformation optimale.

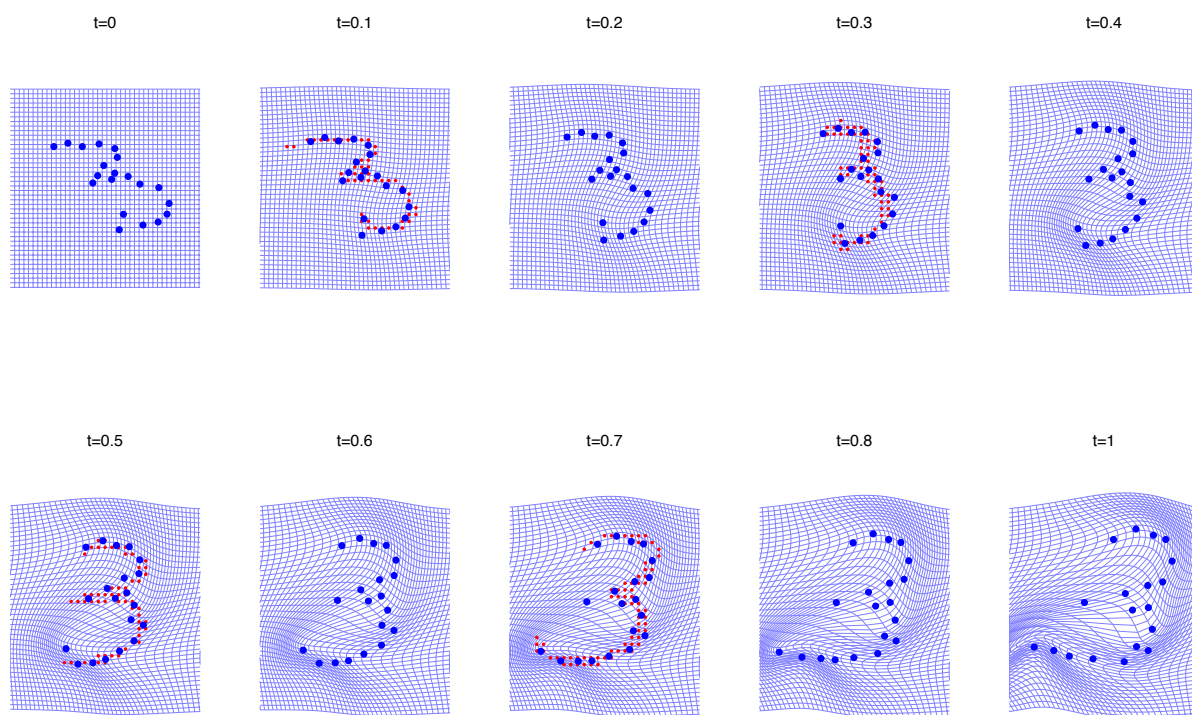


FIGURE 1.2 – Régression géodésique sur des données de chiffres 3 manuscrits. La forme initiale est donnée par 20 points tirés aléatoirement sur $[0, 1]^2$. Les figures successives montrent l'évolution de la déformation d'une grille uniforme et de la forme estimée (points bleus) entre $t = 0$ et $t = 1$. Les 4 formes observées (points rouges) sont positionnées comme termes d'attache aux temps $t = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$.

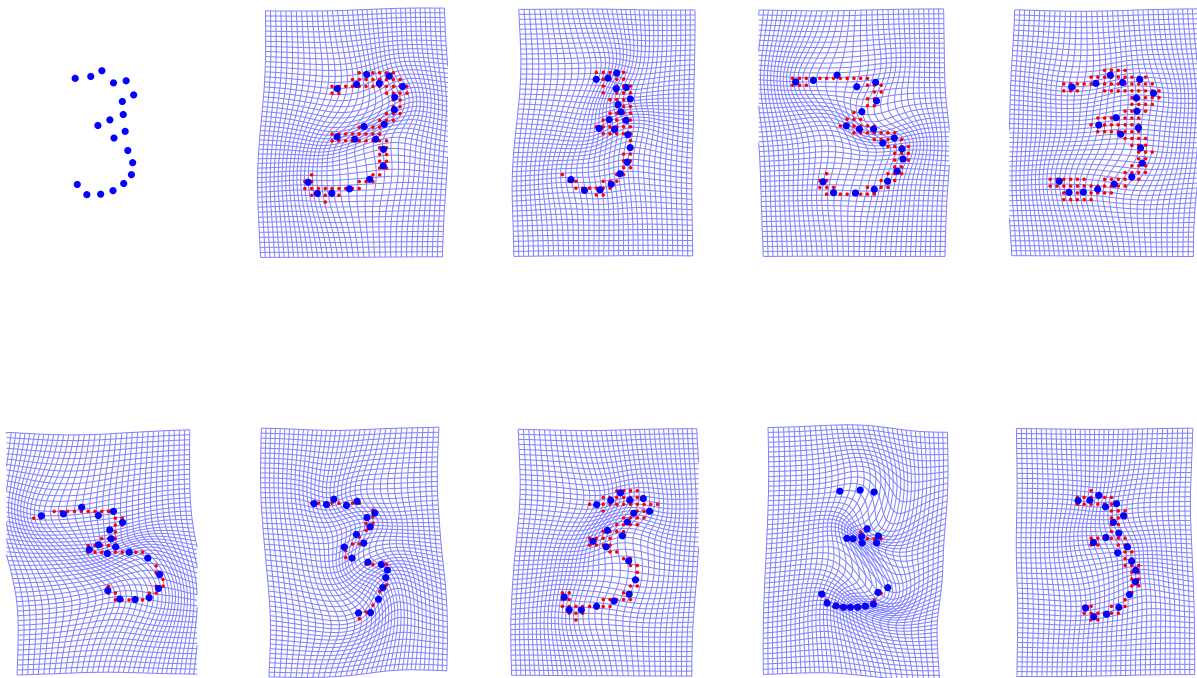


FIGURE 1.3 – Estimation de prototype sur 9 données de chiffres 3 manuscrits. La forme prototype initiale est donnée par 20 points tirés aléatoirement sur $[0, 1]^2$. Première figure : forme prototype obtenue. Figures suivantes : visualisation, pour chacune des 9 formes observées (points rouges), de la déformation (grille bleue) et de la forme prototype déformée (points bleus).

2

Espaces de Hilbert à valeurs vectorielles invariants et noyaux associés

Cette partie présente principalement les résultats issus de l'article [2]. Il s'agit d'une étude théorique de la classe des noyaux d'espaces de Hilbert à noyaux reproduisants à valeurs vectorielles et donnant des métriques invariantes par rotations et translations (qu'on appellera noyaux TRI pour *Translation and Rotation Invariant*, avec en vue les applications aux problèmes d'interpolation de champs de vecteurs et la modélisation des difféomorphismes. Les classes de noyaux modélisant des champs de vecteurs à divergence nulle ou irrotationnels forment des sous-classes de noyaux TRI bien identifiées, ce qui est remarquable mathématiquement et montre qu'il est donc possible de modéliser des groupes de difféomorphismes préservant le volume ou bien générés par des champs irrotationnels, et de les utiliser numériquement sans avoir à traiter ces propriétés comme contraintes.

2.1 Noyaux vectoriels : définitions

La théorie classique des espaces de Hilbert à noyaux reproduisants est développée dans [Aro50a], pour des espaces de fonctions à valeurs réelles ou complexes. Laurent Schwartz a développé par la suite une théorie des sous-espaces hilbertiens dans un cadre d'analyse fonctionnelle très général [Sch64]. L'étude spécifique des espaces de Hilbert de fonctions à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie a été abordée dans [CDVTU10]. Ceci peut être généralisé à des espaces de fonctions à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie. Soit X un ensemble et E un espace vectoriel réel de dimension finie. On notera E^* l'espace dual de E , et pour tous $u \in E$, $\alpha \in E^*$, $\langle \alpha | u \rangle := \alpha(u)$. On considère un sous-espace $H \subset E^X$ muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ et de sa norme induite $\| \cdot \|_H$ tel que $(H, \| \cdot \|_H)$ forme un espace de Hilbert.

Definition 1.

- On dit que H est un espace de Hilbert à noyau reproduisant (RKHS pour *Reproducing Kernel Hilbert Space*) de fonctions de X dans E si pour tout $x \in X$ et tout $\alpha \in E^*$, la forme linéaire

$$\delta_x^\alpha : f \mapsto \langle \alpha | f(x) \rangle$$

est continue sur H , autrement dit s'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall f \in H, \forall x \in X, \forall \alpha \in E^*, \quad |\langle \alpha | f(x) \rangle| \leq M \|f\|_H.$$

- Si H est un RKHS de fonctions de X dans E , alors il existe une unique application $K : X^2 \rightarrow \mathcal{L}(E^*, E)$ telle que pour tous $x \in X$, $\alpha \in E^*$, l'application $y \mapsto K(\cdot, x)\alpha$ appartient à H et vérifie

$$\forall f \in H, \quad \langle \alpha | f(x) \rangle = \langle f, K(\cdot, x)\alpha \rangle_H.$$

remarque On peut aussi considérer K comme étant à valeurs dans $\mathcal{B}(E^*)$ l'espace des formes bilinéaires sur E^* , ou encore à valeurs dans l'espace des tenseurs.

L'existence du noyau reproduisant découle directement du théorème de représentation de Riesz. Voici quelques propriétés classiques des noyaux reproduisants, dans leur version "vectorielle".

Proposition 1. Si $H \subset X^E$ est un RKHS de noyau K , alors

- Pour tous $x, y \in X$ et $\alpha, \beta \in E^*$,

$$\langle K(\cdot, x)\alpha, K(\cdot, y)\beta \rangle_H = \langle \alpha | K(x, y)\beta \rangle = \langle \delta_x^\alpha, \delta_y^\beta \rangle_{H'} \quad (\text{propriété reproduisante}).$$

- Pour tous $x, y \in X$, ${}^t K(x, y) = K(y, x)$.
- K est un noyau défini positif, c'est-à-dire que pour tous $x_1, \dots, x_n \in X$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in E^*$,

$$\sum_{i,j=1}^n \langle \alpha_i | K(x_i, y_j)\beta_j \rangle \geq 0.$$

Inversement, comme dans la théorie classique sur les espaces à noyaux reproduisants, tout noyau positif permet de générer un unique espace de Hilbert dont il est le noyau reproduisant :

Proposition 2. Pour toute fonction $K : X^2 \rightarrow \mathcal{L}(E^*, E)$ qui est un noyau positif (comme défini dans la proposition précédente) et vérifiant ${}^t K(x, y) = K(y, x)$ pour tous $x, y \in X$, il existe une unique espace de Hilbert H de fonctions de X à valeurs dans E dont K est le noyau reproduisant.

H correspond en fait au complété topologique de l'espace engendré par les $K(\cdot, x)\alpha$ pour tous les $x \in X$ et $\alpha \in E^*$, muni du produit scalaire défini par la propriété reproduisante ci-dessus. On remarque au passage que ceci implique que les fonctions noyaux génèrent un espace dense dans H , ou de façon symétrique, que les fonctionnelles d'évaluation génèrent un espace dense dans H' .

On dira que K est un noyau scalaire s'il existe une fonction $h : X^2 \rightarrow \mathbf{R}$ telle que

$$\langle \alpha | K(x, y)\beta \rangle = h(x, y) \langle \alpha | \beta \rangle.$$

La fonction h doit alors nécessairement être un noyau de type positif.

2.2 Résultats de régularité

Les résultats liant la régularité du noyau et de son espace sont essentiels pour les applications aux modèles difféomorphiques. On a le résultat suivant :

Théorème 1. Soit H un RKHS de noyau $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^{d \times d}$, et $s \geq 0$ un entier. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $H \hookrightarrow C_0^s(\Omega, \mathbf{R}^d)$ (on dit que H est s -admissible) ;
- la fonction $\partial_1^p \partial_2^p K$ existe pour tout multi-indice p tel que $0 \leq |p| \leq s$, est continue séparément en chacune de ses deux variables, et est localement bornée,

et impliquent le point suivant :

$$(iii) \text{ pour tous } x \in \Omega, \alpha \in \mathbf{R}^d, \text{ et multi-indice } p \text{ tel que } 0 \leq |p| \leq s, \text{ on a } \partial_2^p K(\cdot, x)\alpha \in H \text{ et}$$

$$\langle \partial_2^p K(\cdot, x)\alpha, u \rangle_H = \alpha \cdot \partial^p u(x), \quad \text{pour tout } u \in H. \quad (2.1)$$

Si de plus on a $K(\cdot, x)\alpha \in C_0^s(\Omega, \mathbf{R}^d)$ pour tous $x \in \Omega$ et $\alpha \in \mathbf{R}^d$, alors $H \hookrightarrow C_0^s(\Omega, \mathbf{R}^d)$.

2.3 Noyaux invariants par rotations et translations

On suppose ici $X = \mathbf{R}^d$, $E = \mathbf{R}^d$, et on identifie E^* à \mathbf{R}^d via la base duale associée à la base canonique de \mathbf{R}^d . On identifie également $\mathcal{L}(\mathbf{R}^d)$ à $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ l'espace des matrices réelles carrées de taille d , de sorte qu'un noyau reproduisant devient une application de $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$ à valeurs dans $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$. On s'intéresse au problème de l'invariance de la norme $\|\cdot\|_H$ par rapport aux isométries affines de \mathbf{R}^d . L'invariance est définie au sens suivant :

Definition 2.

- On dit que $\|\cdot\|_H$ est invariante par translations si $\forall \tau \in \mathbf{R}^d, \forall f \in H, \|f(\cdot + \tau)\|_H = \|f\|_H$.
- On dit que $\|\cdot\|_H$ est invariante par transformations orthogonales si $\forall R \in \mathcal{O}(\mathbf{R}^d), \forall f \in H, \|R^{-1}f(R \cdot)\|_H = \|f\|_H$.

L'invariance de la norme est directement reliée à l'invariance du noyau :

Proposition 3.

- $\|\cdot\|_H$ est invariante par translations si et seulement si K est invariant par translation au sens suivant : pour tous $x, y, \tau \in \mathbf{R}^d, K(x + \tau, y + \tau) = K(x, y)$.
- $\|\cdot\|_H$ est invariante par transformations orthogonales si et seulement si K est invariant par transformations orthogonales au sens suivant : pour tous $x, y, \tau \in \mathbf{R}^d$ et $R \in \mathcal{O}(\mathbf{R}^d), K(Rx, Ry) = RK(x, y)R^{-1}$.

Un des résultats obtenus dans [2] est la caractérisation de tous les noyaux invariants :

Proposition 4.

- K est invariant par translation si et seulement si il existe $k : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{R}^d)$ tel que $\forall x, y \in \mathbf{R}^d, K(x, y) = k(x - y)$.
- K est invariant par translation et transformations orthogonales si et seulement si il existe deux fonctions $k^\parallel, k^\perp : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ telles que $\forall z \in \mathbf{R}^d,$

$$k(z) = k^\parallel(\|z\|)Pr_z^\parallel + k^\perp(\|z\|)Pr_z^\perp, \quad (2.2)$$

où Pr_z^\parallel et Pr_z^\perp désignent les opérateurs de projections sur $\text{Vect}(\{z\})$ et $\text{Vect}(\{z\})^\perp$ respectivement.

On appellera noyau TRI (pour Translation and Rotation Invariant) un noyau défini positif de la forme 2.2. La propriété de positivité impose évidemment des contraintes sur les fonctions k^\parallel et k^\perp . La proposition suivante est une extension du théorème de Bochner :

Proposition 5. Si $k \in L^1(\mathbf{R}^d, \mathcal{M}_d(\mathbf{R}))$ est de la forme 2.2, alors sa transformée de Fourier est aussi de la même forme, c'est-à-dire qu'il existe deux fonctions $h^\parallel, h^\perp : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ telles que $\forall \xi \in \mathbf{R}^d,$

$$\hat{k}(\xi) = h^\parallel(\|\xi\|)Pr_\xi^\parallel + h^\perp(\|\xi\|)Pr_\xi^\perp. \quad (2.3)$$

De plus k est alors un noyau défini positif si et seulement si h^\parallel et h^\perp sont à valeurs dans \mathbf{R}^+ .

Les formules définissant h^\parallel et h^\perp à partir de k^\parallel et k^\perp sont données dans [2]. Elles correspondent à une extension de la transformée de Hankel.

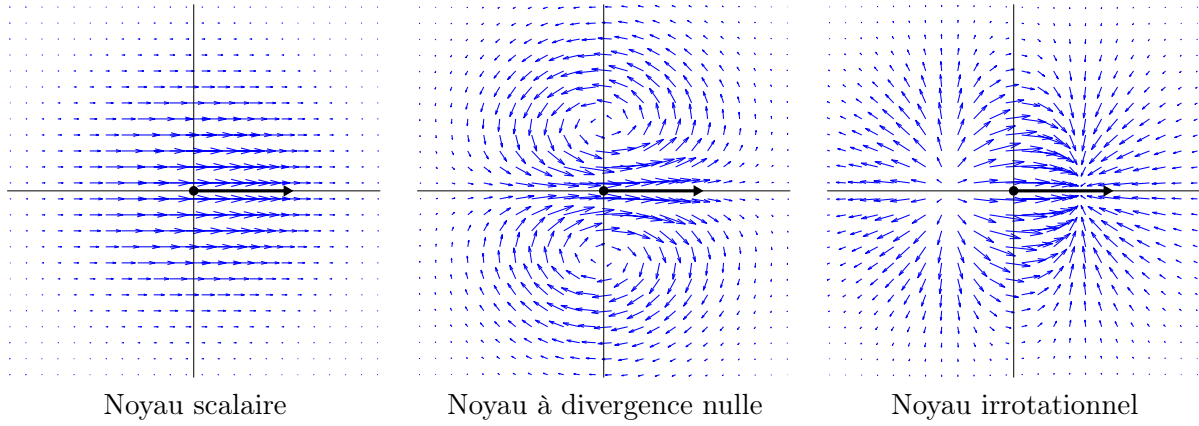


FIGURE 2.1 – Trois exemples de noyaux matriciels invariants sur \mathbf{R}^2 . Les figures représentent les champs de vecteurs $x \mapsto K(x, y)\alpha$ avec $y = (0, 0)$ et $\alpha = (1, 0)$.

2.4 Noyaux à divergence nulle et à rotationnel nul

L'utilisation de noyaux invariants non scalaires permet d'envisager de définir des espaces de Hilbert de champs de vecteurs à divergence nulle ou inversement irrotationnels, ou encore des espaces intermédiaires. Ceci a un intérêt évident pour la modélisation des déformations puisque par exemple les champs à divergence nulle génèrent des groupes de déformations préservant le volume, ce qui peut être une contrainte souhaitable pour certaines applications.

De ce point de vue l'intérêt de construire des noyaux à divergence nulle est que cette contrainte n'a pas besoin d'être traitée comme une contrainte, elle est obtenue directement par le modèle.

D'autre part les champs irrotationnels peuvent aussi trouver des applications, comme par exemple pour les modèles de croissance de formes.

Le résultat suivant montre le lien fort entre les noyaux invariants et les noyaux à divergence nulle ou irrotationnels :

Proposition 6. *Soit k un noyau TRI défini positif, de régularité C^1 et tel que k et \hat{k} sont dans $L^1(\mathbf{R}^d, \mathcal{M}_d(\mathbf{R}))$. Soit l'espace de Hilbert H généré par k . Alors*

- $\forall u \in H, \text{Div}(u) = 0 \Leftrightarrow h^{\parallel} = 0,$
- $\forall u \in H, \text{Curl}(u) = 0 \Leftrightarrow h^{\perp} = 0.$

où Curl correspond à l'opération de dérivation extérieure sur les 1-formes différentielles via l'identification entre formes et vecteurs.

Ce résultat permet donc de générer tous les noyaux à divergence nulle (respectivement irrotationnels) en calculant les transformée de Fourier inverses des fonctions de type 2.3 avec $h^{\parallel} = 0$ et h^{\perp} quelconque (resp. h^{\parallel} et $h^{\perp} = 0$). Cependant il existe une façon encore plus simple de générer de tels noyaux à partir de noyaux scalaires, donnée par le résultat suivant :

Proposition 7.

- *Si $k : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction de type positif s -admissible pour $s \geq 1$, alors en posant*

$$k^{\parallel}(r) = k''(r), \quad k^{\perp}(r) = \frac{1}{r}k'(r),$$

on définit un noyau d'espace de Hilbert de champs irrotationnels $s - 1$ -admissible.

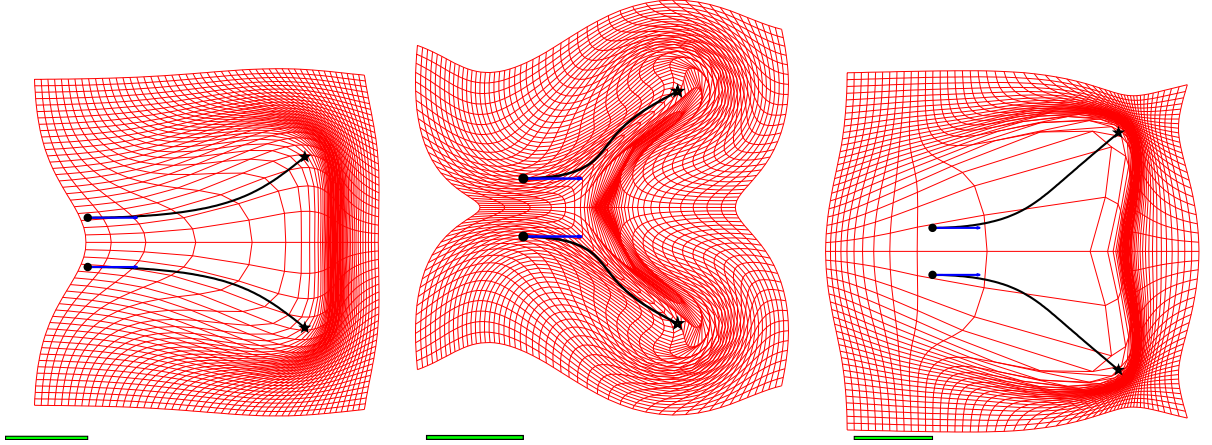


FIGURE 2.2 – Exemples de tirs géodésiques pour les métriques à noyaux scalaires, divergence nulle et rotationnel nul. Chaque image montre la trajectoire temporelle d’un système de deux landmarks initialement positionnés sur l’axe vertical, avec des vecteurs moment initiaux identiques correspondant aux flèches. La grille rouge montre la déformation d’une grille régulière sous l’action du difféomorphisme engendré par le système dynamique.

- Si $k : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction de type positif s -admissible pour $s \geq 1$, alors en posant

$$k^{\parallel}(r) = \frac{d-1}{r}k'(r), \quad k^{\perp}(r) = \frac{d-2}{r}k'(r) + k''(r),$$

on définit un noyau d’espace de Hilbert de champs à divergence nulle $s-1$ -admissible.

2.5 Exemples numériques : tirs géodésiques et appariement avec noyaux TRI

La figure 2.5 montre la dynamique des géodésiques dans l’espace des landmarks générés par des noyaux de type scalaire, divergence nulle ou rotationnel nul.

La figure 2.5 montre un exemple de recalage de surfaces par difféomorphismes générés par des champs à divergence nulle ou irrotationnels. Le terme d’attache correspond à la méthode des courants décrite au chapitre 3.

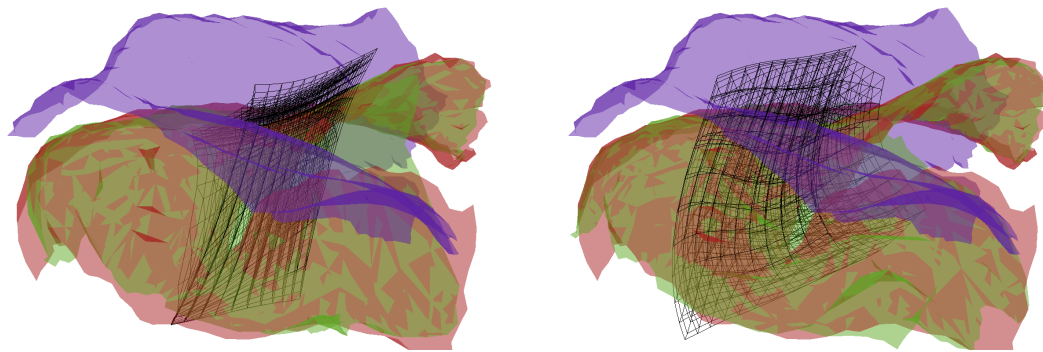


FIGURE 2.3 – Exemples d'appariements difféomorphiques de surfaces corticales générés par des champs à divergence nulle (à gauche) et irrotationnels (à droite). En bleu : surface initiale, en rouge : surface cible, en vert : déformation de la surface initiale. La grille tri-dimensionnelle permet de visualiser la déformation volumique induite.

3

Courants et cycles normaux

Cette partie présente les méthodes introduites dans les papiers [1, 3], [12] sur la problématique de l'appariement de courbes. Néanmoins j'adopte ici une présentation synthétique des métriques à noyau sur les courants, incluant de fait les méthodes proposées pendant ma thèse [8, 20, 9] sur l'appariement de nuages de points et de surfaces.

Le principe commun à ces méthodes est la définition de normes hilbertiennes duales sur des espaces de courants (au sens de distributions sur des espaces de formes différentielles) afin d'obtenir des termes d'attache aux données facilement calculables et pertinents d'un point de vue géométrique. Le choix de travailler dans ces espaces permet de prendre en compte des données géométriques très variées et potentiellement singulières et bruitées, d'inclure dans le modèle les approximations discrètes du modèle continu, et d'adopter une représentation non paramétrée des formes. Le choix de normes hilbertiennes duales permet également d'obtenir des expressions explicites pour leur calcul grâce aux noyaux reproduisants associés à ces normes.

Le modèle présenté dans la section 3.1 développe cette méthodologie en considérant que les formes sont modélisées elles-mêmes en tant que courants (ou de mesures, vues ici comme courants d'ordre 0). Il a été repris et utilisé dans de nombreux travaux théoriques ou applicatifs ; certains d'entre-eux seront présentés dans le chapitre 5. Dans la section 3.2, je présente un modèle proposé récemment et faisant l'objet d'une thèse en cours [3],[12]. Il consiste à considérer le courant associé au fibré normal unitaire de la forme et non plus à la forme elle-même, ce qui est appelé cycle normal en théorie géométrique de la mesure. Ce nouveau modèle, que l'on peut voir comme un modèle d'ordre 2, présente plusieurs avantages malgré une complexité calculatoire plus grande.

3.1 Courants

3.1.1 Formes différentielles et courants

Considérons une sous-variété orientée S de \mathbf{R}^d , de dimension m , de classe C^∞ , compacte et sans bord. Toute m -forme différentielle ω de classe C^∞ et définie sur \mathbf{R}^d peut être intégrée sur S , ce qui se note :

$$\int_S \omega.$$

L'idée initiale du concept de courant est de voir cette intégrale comme fonction linéaire de ω , et par conséquent d'associer à la sous-variété S la forme linéaire $[S] : \omega \mapsto \int_S \omega$. $[S]$ est appelé courant associé à S ; il s'agit donc d'une forme linéaire sur l'espace des m -formes différentielles. Ainsi l'ensemble des sous-variétés se retrouve plongé dans un espace dual d'un espace des m -formes, sur lequel il devient possible de travailler avec des outils d'analyse fonctionnelle usuels.

Pour donner un exemple simple, considérons le cas d'une courbe ($m = 1$), paramétrée par $\gamma : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{R}^d$, où \mathbf{T} est le tore de dimension 1 et γ est supposée C^∞ et injective. Alors l'intégration d'une 1-forme s'écrit

$$[S](\omega) = \int_0^1 \langle \omega(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle dt,$$

et cette expression est indépendante de la paramétrisation γ de S (à condition qu'elle respecte l'orientation choisie). La 1-forme ω s'identifie naturellement à un champ de vecteurs $\bar{\omega}$ sur \mathbf{R}^d , de sorte que

$$[S](\omega) = \int_0^1 \langle \bar{\omega}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt.$$

Autrement dit $[S](\omega)$ correspond à la circulation du champ $\bar{\omega}$ le long du chemin γ .

Notations

- On notera $\Lambda_m(\mathbf{R}^d)$ l'espace des m -vecteurs,
- $\Lambda^m(\mathbf{R}^d) = \Lambda_m((\mathbf{R}^d)^*)$ l'espace des m -covecteurs,
- $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le crochet de dualité entre m -vecteurs et m -covecteurs.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\Lambda_m(\mathbf{R}^d)$. Ce produit scalaire est tel qu'une base orthonormée est donnée par les $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}$ pour $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq d$ où (e_1, \dots, e_d) est la base canonique de \mathbf{R}^d . Il vérifie par ailleurs

$$\langle u_1 \wedge \dots \wedge u_m, v_1 \wedge \dots \wedge v_m \rangle = \det(\langle u_i, v_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq m}$$

pour tous vecteurs $u_i, v_j \in \mathbf{R}^d$, $1 \leq i, j \leq m$.

- On peut associer canoniquement à tout m -covecteur $\omega \in \Lambda^m(\mathbf{R}^d)$ un unique m -vecteur que l'on notera $\bar{\omega}$ vérifiant $\forall \tau \in \Lambda_m(\mathbf{R}^d)$, $\langle \omega | \tau \rangle = \langle \bar{\omega}, \tau \rangle$.
- On notera également $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur $\Lambda^m(\mathbf{R}^d)$ induit par l'isomorphisme $\omega \mapsto \bar{\omega}$ entre $\Lambda_m(\mathbf{R}^d)$ et $\Lambda^m(\mathbf{R}^d)$.

Remarquons que $\Lambda_m(\mathbf{R}^d)$ (respectivement $\Lambda^m(\mathbf{R}^d)$) est aussi muni d'une norme appelée *mass norm* définie comme

$$\|\tau\| := \sup\{\langle \omega | \tau \rangle, \omega \text{ } m\text{-covecteur simple}, |\omega| \leq 1\}$$

(resp. $\|\omega\| := \sup\{\langle \omega | \tau \rangle, \tau \text{ } m\text{-vecteur simple}, |\tau| \leq 1\}$)

Voici à présent des notations sur les espaces fonctionnels et la définition de l'espace des courants :

- On note $\Omega_c^m(\mathbf{R}^d) = C_c^\infty(\mathbf{R}^d, \Lambda^m(\mathbf{R}^d))$ espace des m -formes différentielles C^∞ à support compact, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact des dérivées partielles à tout ordre,
- $\Omega_0^m(\mathbf{R}^d) = C_0^\infty(\mathbf{R}^d, \Lambda^m(\mathbf{R}^d))$ l'espace des m -formes différentielles C^∞ à décroissance rapide,
- $\Omega_{k,0}^m(\mathbf{R}^d) = C_0^k(\mathbf{R}^d, \Lambda^m(\mathbf{R}^d))$ l'espace des m -formes différentielles de classe C^k à décroissance rapide (i.e. dont toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre k tendent vers 0 à l'infini),
- $\mathcal{D}_m(\mathbf{R}^d) = \Omega_c^m(\mathbf{R}^d)'$ l'espace des courants, i.e. l'espace des formes linéaires continues sur $\Omega_c^m(\mathbf{R}^d)$.
- $\mathcal{M}_m(\mathbf{R}^d) = \Omega_{0,0}^m(\mathbf{R}^d)'$ espace des mesures de Radon à valeurs dans $\Lambda^m(\mathbf{R}^d)$. C'est un sous-espace de l'espace des courants.

3.1.2 Courants associés aux ensembles rectifiables

Si $S \subset \mathbf{R}^d$ est un sous-ensemble m -rectifiable, on peut définir le courant associé à S par

$$[S](\omega) := \int_S \langle \omega(x) | \tau_S(x) \rangle d\mathcal{H}^m(x).$$

Cette définition est compatible avec l'écriture classique de l'intégration des formes différentielles sur des variétés C^1 . Si S est une sous-variété C^1 de \mathbf{R}^d de dimension m , et que $\phi : U \rightarrow \mathbf{R}^d$, est une carte locale, avec $U \subset \mathbf{R}^m$, $\phi(U) \subset S$, et si ω est à support dans V tel que $V \cap S \subset \phi(U)$, alors

$$[S](\omega) = \int_U \langle \omega(\phi(x)) | \partial_1 \phi(x) \wedge \dots \wedge \partial_m \phi(x) \rangle dx_1 \cdots dx_m.$$

Les courants associés à des sous-ensembles m -rectifiables sont en fait des éléments de $\mathcal{M}_m(\mathbf{R}^d)$.

3.1.3 Normes hilbertiennes duales sur les espaces de courants

On définit une structure hilbertienne sur l'espace des formes différentielles de \mathbf{R}^d à partir de la définition d'un noyau de type positif 1-admissible (cf chapitre 2) $K_W : (\mathbf{R}^d)^2 \rightarrow \mathcal{L}(\Lambda_m(\mathbf{R}^d), \Lambda^m(\mathbf{R}^d))$. Un choix simple et valide est le noyau scalaire gaussien défini par

$$\langle K_W(x, y) \tau | \tau' \rangle = \frac{1}{\sigma_W^m} e^{-\frac{|x-y|^2}{\sigma_W^2}} \langle \tau, \tau' \rangle,$$

où σ_W est un paramètre d'échelle fixé.

Ce noyau définit un espace de Hilbert W de formes différentielles s'injectant dans $\Omega_{1,0}^m(\mathbf{R}^d)$. La norme duale est définie classiquement sur l'espace de Hilbert W' dual des formes linéaires continues sur W par :

$$\forall \mu \in W', \quad \|\mu\|_{W'} = \sup \{ \mu(\omega), \omega \in W, \|\omega\|_W \leq 1 \}.$$

Du fait de l'injection $W \hookrightarrow \Omega_{1,0}^m(\mathbf{R}^d)$, il est clair que tout courant $\mu \in \Omega_{1,0}^m(\mathbf{R}^d)'$ définit par restriction à W un élément de W' (noté aussi μ) vérifiant $\|\mu\|_{W'} \leq C \|\mu\|_{1,\infty}$ pour une certaine constante $C > 0$ indépendante de μ . En particulier les courants associés à des sous-ensembles rectifiables de \mathbf{R}^d sont par restriction des éléments de W' . Un point important, abordé dans [CT13] pour les applications au recalage, est que cette restriction n'est pas nécessairement injective ; autrement dit il se peut que plusieurs courants définissent la même forme linéaire dans W' . Cette propriété d'injectivité, qui dépend de fait uniquement du noyau K_W , est appelé *universalité* du noyau. Plus précisément, la propriété de C^0 -universalité du noyau assure que cette restriction est bien injective pour les courants appartenant à $\mathcal{M}_m(\mathbf{R}^d)$, et donc en particulier pour les courants associés à des ensembles rectifiables. On sait (cf. [CDVTU10]) que la propriété est équivalente à la densité de W dans $\Omega_0^m(\mathbf{R}^d)$ et qu'elle est vérifiée en particulier pour le noyau gaussien, noyau le plus utilisé en pratique pour la méthode des courants. Cependant il est important de préciser que cette propriété n'est pas requise d'un point de vue théorique pour que la méthode des courants soit bien définie et applicable.

Notons $\mu \mapsto \hat{\mu}$ l'isométrie de Riesz entre W' et W , de sorte que pour tout $\mu \in W'$ et tout $\omega \in W$,

$$\mu(\omega) = \langle \hat{\mu}, \omega \rangle_W.$$

En jouant sur la propriété du noyau reproduisant, on peut aussi écrire que pour tout $x \in \mathbf{R}^d, \eta \in \Lambda_m(\mathbf{R}^d)$,

$$\langle \hat{\mu}(x) | \eta \rangle = \langle \hat{\mu}, K_W(\cdot, x) \eta \rangle_W = \mu(K_W(\cdot, x) \eta),$$

et donc que

$$\|\mu\|_{W'}^2 = \mu(\hat{\mu}).$$

Considérons à présent un ensemble rectifiable. Comme il vient d'être dit, le courant $[S]$ peut être assimilé par restriction à un élément de W' et on a

$$\|[S]\|_{W'}^2 = [S](\widehat{[S]}).$$

Ainsi,

$$\|[S]\|_{W'}^2 = \int_S \langle \widehat{[S]}(x) | \tau_S(x) \rangle d\mathcal{H}^m(x),$$

avec $\forall x, \eta$,

$$\langle \widehat{[S]}(x) | \eta \rangle = [S](K_W(\cdot, x)\eta) = \int_S \langle K_W(y, x)\eta | \tau_S(y) \rangle d\mathcal{H}^m(y) = \int_S \langle K_W(x, y)\tau_S(y) | \eta \rangle d\mathcal{H}^m(y),$$

et donc

$$\widehat{[S]}(x) = \int_S K_W(x, y)\tau_S(y) d\mathcal{H}^m(y),$$

et donc

$$\begin{aligned} \|[S]\|_{W'}^2 &= \int_S \left\langle \int_S K_W(x, y)\tau_S(y) d\mathcal{H}^m(y) \middle| \tau_S(x) \right\rangle d\mathcal{H}^m(x), \\ \|[S]\|_{W'}^2 &= \int_S \int_S \langle K_W(x, y)\tau_S(y) | \tau_S(x) \rangle d\mathcal{H}^m(y) d\mathcal{H}^m(x). \end{aligned}$$

De la même manière, le produit scalaire entre les courants associés à deux ensembles rectifiables s'écrit

$$\langle [S], [T] \rangle_{W'} = \int_S \int_T \langle K_W(x, y)\tau_T(y) | \tau_S(x) \rangle d\mathcal{H}^m(y) d\mathcal{H}^m(x).$$

La méthode des courants consiste à utiliser cette norme duale comme terme d'attache aux données dans un problème d'appariement. On utilise donc comme mesure de l'éloignement géométrique entre deux courbes ou surfaces la quantité

$$\|[S] - [T]\|_{W'}^2 = \langle [S], [S] \rangle_{W'} + \langle [T], [T] \rangle_{W'} - 2\langle [S], [T] \rangle_{W'}.$$

3.1.4 Expression de la métrique pour les modèles discrets

Nous voyons ici comment il est possible d'expliciter la métrique pour des modèles discrets de façon à obtenir un terme d'attache aux données directement utilisable dans les algorithmes présentés au chapitre 1.

L'idée est de considérer des approximations dans l'espace des courants définies comme combinaisons linéaires de fonctionnelles d'évaluation (Diracs). Rappelons comme on l'avait introduit au chapitre 2 dans une situation plus générale que l'espace W' contient par définition les formes linéaires d'évaluation :

$$\delta_x^\eta : \omega \mapsto \langle \omega(x) | \eta \rangle,$$

pour tous $x \in \mathbf{R}^d$ et $\eta \in \Lambda_m(\mathbf{R}^d)$, et que la métrique duale est explicite pour de telles formes :

$$\langle \delta_x^\eta, \delta_y^{\nu'} \rangle_{W'} = \langle \eta, K_W(x, y)\nu' \rangle.$$

D'autre part l'espace engendré par ces formes étant dense dans W' , n'importe quel élément de W' , en particulier les courants associés aux ensembles rectifiables, est approchable par des combinaisons linéaires de telles formes.

De telles approximations peuvent être facilement définies si l'on dispose déjà d'approximations des ensembles sous la forme d'éléments finis : ensembles de points, unions de segments ou de triangles suivant la dimension.

Ainsi dans le cas $m = 1$ un segment $S = [a, b] \subset \mathbf{R}^d$ est approché par la fonctionnelle δ_c^τ où $c = (a + b)/2$ et $\tau = b - a$. L'erreur commise par cette approximation peut être simplement majorée :

$$|[S](\omega) - \delta_c^\tau(\omega)| \leq \int_0^1 |\langle \omega(a + s\tau) - \omega(c) | \tau \rangle| ds \leq \int_0^1 |\omega(a + s\tau) - \omega(c)| |\tau| ds$$

$$|[S](\omega) - \delta_c^\tau(\omega)| \leq \frac{1}{2} \|\omega\|_{1,\infty} |\tau|^2 \leq \frac{C}{2} \|\omega\|_W |\tau|^2$$

et donc

$$\|[S] - \delta_c^\tau\|_{W'} \leq \frac{C}{2} |\tau|^2.$$

Dans le cas d'une union de segments, l'approximation est obtenue en sommant les fonctionnelles associées à chaque segment, et l'erreur commise est donc majorée par $\frac{n_f C d_{max}^2}{2}$, où n_f est le nombre de segments et d_{max} la longueur maximale des segments.

Dans le cas des surfaces ($m = 2$) chaque triangle de sommets a, b, d est approché par δ_c^ν où $c = (a + b + d)/3$ et $\nu = (b - a) \wedge (d - b)$, et on obtient une majoration de l'erreur similaire.

Remarquons que dans le cas $m = 0$ l'espace des courants est en fait l'espace des mesures usuel, et les ensembles 0-rectifiables correspondent aux ensembles dénombrables. En pratique pour les applications, cela signifie qu'on considère uniquement des ensembles finis de points, dont les mesures correspondantes sont les sommes des Diracs associés aux points. De ce fait le cas $m = 0$ est en fait essentiellement discret en lui-même. Cependant il est aussi possible de modéliser des ensembles rectifiables de dimension plus grande, comme des courbes ou des surfaces, en tant que mesures, en définissant une distribution de masse sur ces ensembles, auquel cas il faut simplement approcher la distribution par une mesure discrète. Cette méthode a été introduite en fait dans l'article [8] antérieurement à la méthode des courants.

Pour boucler le lien avec le chapitre 1, notons qu'afin d'utiliser ces expressions comme termes d'attache dans la méthode de tir géodésique, il est nécessaire de les exprimer comme fonctions des sommets de la première forme (extrémités des segments ou sommets des triangles), qui correspondent aux points $q_i(t)$ du système hamiltonien, puis de calculer également l'expression de leurs gradients, ce que je n'expose pas ici.

3.1.5 Exemples numériques

La figure 3.1 montre un exemple de recalage diffeomorphique de surfaces avec terme d'attache de type courants. (N.B. les figures du premier chapitre montraient des exemples utilisant le terme d'attache des mesures (cas $m = 0$)).

3.2 Cycles normaux

Cette partie résume le travail développé dans [12] et [3].

La notion d'orientation, inhérente au concept des courants, pose souvent problème pour des applications en anatomie computationnelle. En effet, tout procédé de recalage utilisant la méthode des courants nécessite de définir une orientation cohérente sur les formes à comparer, ce qui peut s'avérer difficile voire arbitraire en pratique. De plus, du fait de l'orientation des formes,

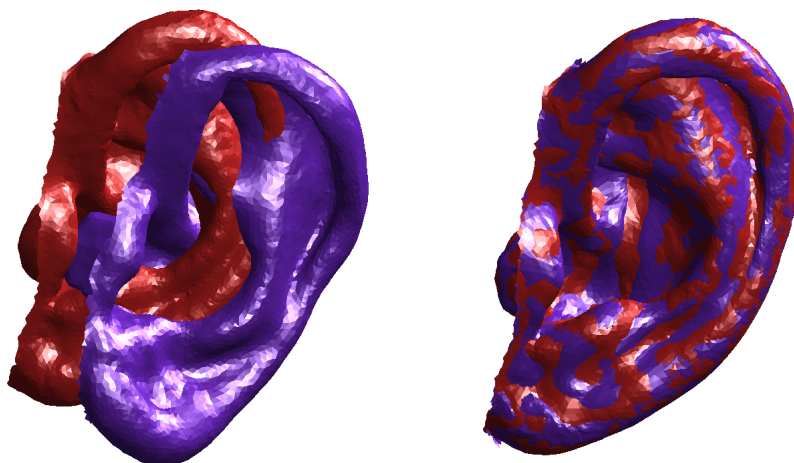


FIGURE 3.1 – Exemple d'appariement difféomorphique entre deux maillages d'oreilles humaines obtenu avec un terme d'attache de type courants. A gauche, surfaces avant recalage ; à droite : surface source (en bleu) déformée sur la cible (rouge).

des effets d'annulation locale des courants peuvent apparaître en présence de formes en "pic", ou pire de telles formes peuvent être générées par déformation (voir figure 3.2).

Pour remédier à ce problème, Nicolas Charon a proposé une méthode similaire à celle des courants mais utilisant la notion de *varifold* [CT13], consistant à considérer des mesures (scalaires) dans l'espace des espaces tangents à la forme.

La méthode présentée ici consiste à construire des métriques à noyaux et leurs versions discrètes pour les courants associés au fibré normal unitaire des ensembles, appelé cycle normal en théorie géométrique de la mesure, et lié très étroitement à la notion de mesure de courbure. L'objectif est d'abord d'obtenir un modèle d'ordre deux, qui permette de prendre en compte l'information de courbure des formes dans le recalage. Par ailleurs on verra que le modèle des cycles normaux permet, comme celui des varifolds, de s'affranchir de la nécessité d'orienter les formes.

Cette approche est donc étroitement reliée aux modèles des courants et des varifolds car elle consiste aussi en la définition de métriques à noyaux qui prennent des formes explicites dans un cadre discret. De plus, même si ces métriques sont définies sur des espaces différents, leurs expressions finales sur les sous-variétés sont directement comparables, et il est possible en jouant sur les noyaux utilisés de voir les métriques de courants comme cas particuliers des métriques varifold, elles-même étant vues comme cas particuliers ou projections des métriques sur les cycles normaux.

3.2.1 Cycle normal

Le concept de cycle normal vient à l'origine des travaux de Federer sur la formule du tube et les mesures de courbure [Fed59]. La formule du tube est une formule classique et remarquable en géométrie différentielle usuelle montrant que le volume du ε -dilaté d'un ensemble est une fonction polynomiale de ε dont les coefficients correspondent aux intégrales des courbures. Pour en parler il est plus simple d'introduire ceci par un exemple : si Ω est un domaine de \mathbf{R}^3 dont le bord est une surface régulière S , alors pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, le volume du dilaté Ω_ε vérifie la

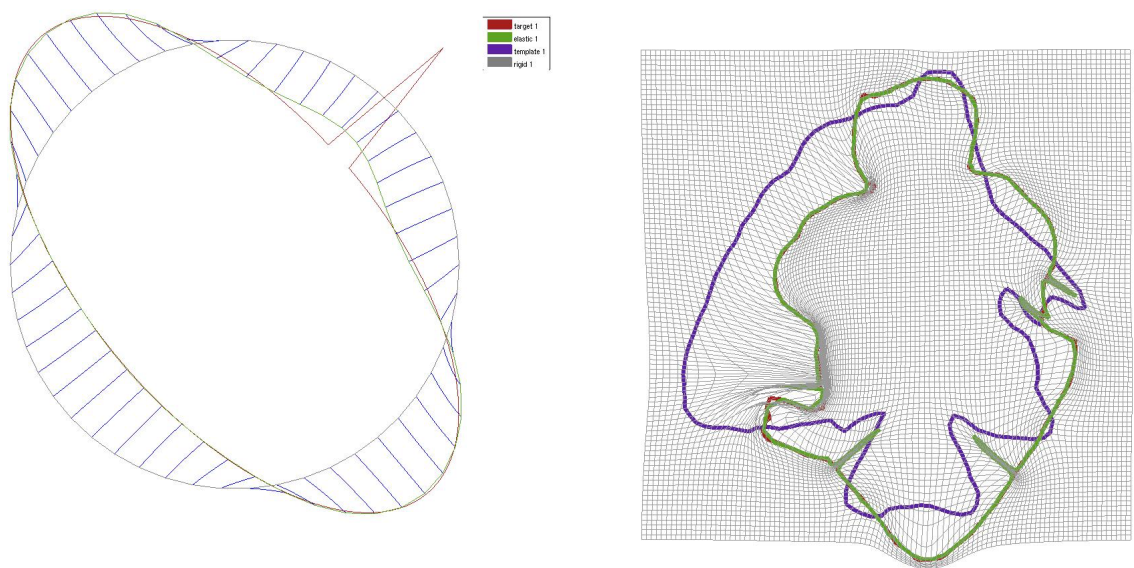


FIGURE 3.2 – Deux exemples de défauts du modèle des courants : à gauche appariement d'un cercle sur une ellipse avec un "pic". Les deux branches du pic sont proches et ont des orientations opposées, ce qui tend à annuler leur contribution dans la métrique à noyau. Le recalage est donc faiblement influencé par ce pic. A droite, appariement de deux silhouettes de poissons, illustrant l'effet inverse, toujours du à cet propriété d'annulation due à l'orientation. Du fait de la complexité des formes, la solution obtenue génère des pics dans la forme finale.

formule :

$$\mathcal{V}(\Omega_\varepsilon) = \mathcal{V}(\Omega) + \mathcal{A}(S)\varepsilon + \frac{1}{2}H(S)\varepsilon^2 + \frac{1}{3}G(S)\varepsilon^3,$$

où $\mathcal{A}(S), H(S), G(S)$ correspondent respectivement à l'aire de S , l'intégrale de sa courbure moyenne et l'intégrale de sa courbure de Gauss. Cette formule est aussi localisable, ce qui a conduit Federer à étendre les notions classiques de courbure en géométrie différentielle en interprétant les coefficients de ces formules polynomiales locales comme des mesures de courbure, définissables pour une classe d'ensemble très générale.

Ensembles de type *positive reach* et fibré normal unitaire

Federer a unifié des résultats précédents sur les formules du tube dans les cas particuliers des ensembles convexes (formule de Steiner) et des variété lisses (formule de Weyl) en construisant sa théorie sur la notion d'ensemble de type *positive reach*. Les travaux ultérieurs menant à la définition du cycle normal sont dus à Zähle [Z86, Z87]. Donnons quelques définitions et résultats sur cette construction.

Si X est un ensemble quelconque de \mathbf{R}^d et $y \in \mathbf{R}^d$ quelconque, on note $d(y, X) = \inf\{|y - x|, x \in X\}$. Pour tout $\varepsilon \geq 0$ on note

$$X_\varepsilon = \{y \in \mathbf{R}^d, d(y, X) \leq \varepsilon\}, \quad \text{et} \quad \partial X_\varepsilon = \{y \in \mathbf{R}^d, d(y, X) = \varepsilon\}.$$

S'il existe $x \in X$ unique tel que $|y - x| = d(y, X)$, on dit que y admet une projection unique sur X et on note alors $x = \pi_X(y)$, projeté de y sur X . On définit alors

$$\text{reach}(X) = \sup\{\varepsilon \geq 0, \forall y \in X_\varepsilon, y \text{ admet une projection unique sur } X\}.$$

Si $\text{reach}(X) > 0$ on dit que X est un ensemble de type *positive reach*. On note $PR(\mathbf{R}^d)$ la classe des ensembles de ce type.

Soit $X \in PR(\mathbf{R}^d)$ et $0 < \varepsilon < \text{reach}(X)$. Si $x \in X$, on dit que $\nu \in S^{d-1}$ est un *vecteur normal unitaire* à X en x s'il existe $y \in \partial X_\varepsilon$ tel que $x = \pi_X(y)$ et $\nu = \frac{1}{\varepsilon}(y - x)$. On peut montrer facilement que cette définition est indépendante du ε considéré. La figure 3.3 illustre cette notion généralisée de vecteur normal unitaire.

Le *fibré normal unitaire* de X , noté \mathcal{N}_X , est alors l'ensemble des couples (x, ν) , où $x \in X$ et ν est un vecteur normal unitaire à X en x . \mathcal{N}_X est donc un sous-ensemble de $\mathbf{R}^d \times S^{d-1}$.

On peut alors considérer l'application

$$\varphi_\varepsilon \begin{cases} \partial X_\varepsilon \rightarrow \mathcal{N}_X \\ y \mapsto \left(\pi_X(y), \frac{y - \pi_X(y)}{\varepsilon} \right). \end{cases}$$

On peut montrer que cette application bijective et bi-Lipschitz, et d'autre part que ∂X_ε est une hyper-surface de classe C^1 et fermée de \mathbf{R}^d . En combinant ces deux résultats on peut voir que \mathcal{N}_X est un sous-ensemble $d - 1$ -rectifiable de $\mathbf{R}^d \times S^{d-1}$.

Par ailleurs ∂X_ε étant canoniquement orientée en tant qu'hypersurface fermée, elle induit via l'application φ_ε une orientation canonique sur \mathcal{N}_X , indépendante de ε .

Cycle Normal

Puisque \mathcal{N}_X est un ensemble rectifiable orienté, on peut considérer son courant associé, appelé le cycle normal. Notons $\Omega_0^{d-1}(\mathbf{R}^d \times S^{d-1}) = \mathcal{C}_0^0(\mathbf{R}^d \times S^{d-1}, \Lambda^{d-1}(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)^*)$.

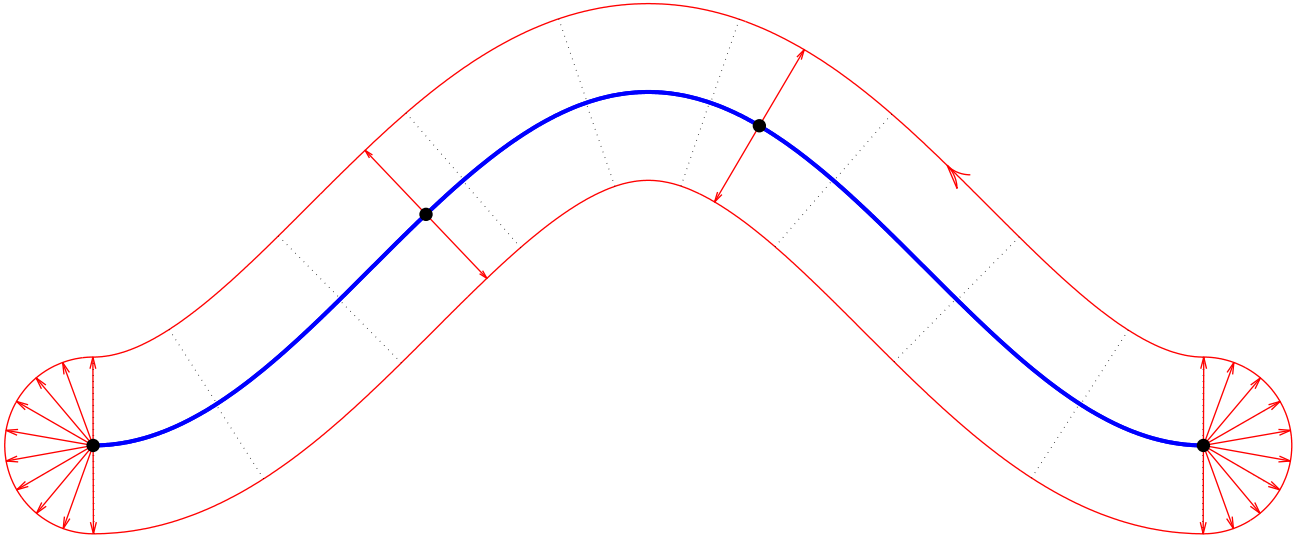


FIGURE 3.3 – Illustration du fibré normal unitaire pour une courbe régulière non fermée dans \mathbf{R}^2 .

Definition 3 (Normal cycle). *Le cycle normal d'un ensemble X de positive reach est le $(d-1)$ -courant associé à \mathcal{N}_X . Si $\omega \in \Omega_0^{d-1}(\mathbf{R}^d \times S^{d-1})$ est une $(d-1)$ -forme différentielle sur $\mathbf{R}^d \times S^{d-1}$, on a*

$$N(X)(\omega) := [\mathcal{N}_X](\omega) = \int_{\mathcal{N}_X} \langle \omega(x, n) | \tau_{\mathcal{N}_X}(x, n) \rangle d\mathcal{H}^{d-1}(x, n) \quad (3.1)$$

où $\tau_{\mathcal{N}_X}(x, n)$ est le $(d-1)$ -vecteur associé à une base orthonormée orientée positivement de $T_{(x,n)}\mathcal{N}_X$.

Encodage de la courbure dans le cycle normal

Le lien entre cycle normal et courbures se fait au moyen de formes canoniques particulières appelées formes de Lipschitz-Killing. Plutôt que d'exposer les formules générales, voyons le cas de \mathbf{R}^3 . Pour tout $n \in S^2$, on peut considérer des vecteurs e_1, e_2 tels que (e_1, e_2, n) forment une base orthonormée de \mathbf{R}^3 . On pose alors $\varepsilon_i = (e_i, 0) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$ et $\tilde{\varepsilon}_i = (0, e_i) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$ pour $i = 1, 2$, puis on définit pour tout $x \in \mathbf{R}^3$,

$$\begin{cases} \bar{\omega}_0(x, n) = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2, \\ \bar{\omega}_1(x, n) = \tilde{\varepsilon}_1 \wedge \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \wedge \tilde{\varepsilon}_2, \\ \bar{\omega}_2(x, n) = \tilde{\varepsilon}_1 \wedge \tilde{\varepsilon}_2. \end{cases}$$

Ceci définit en fait des 2-formes différentielles $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ sur $\mathbf{R}^3 \times S^2$, car ces expressions ne dépendent pas des vecteurs e_1, e_2 choisis.

Considérons à présent une surface S régulière de \mathbf{R}^3 et dérivons à la main l'expression du cycle normal pour voir comment apparaissent les courbures. Supposons que S est localement paramétrée par $\gamma : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$. Soit $u \in \Omega$ et $x = \gamma(u) \in S$. S admet en x deux vecteurs normaux unitaires $n(u)$ et $-n(u)$, avec

$$n(u) = \frac{\partial_1 \gamma(u) \times \partial_2 \gamma(u)}{|\partial_1 \gamma(u) \times \partial_2 \gamma(u)|},$$

de sorte que \mathcal{N}_S est localement composé de deux composantes connexes, paramétrées par $\Gamma(u) = (\gamma(u), n(u))$ et $\tilde{\Gamma}(u) = (\gamma(u), -n(u))$. Cependant, pour tenir compte de l'orientation canonique de \mathcal{N}_S , il faut inverser l'orientation de la deuxième composante, ou bien, ce qui revient au même, compter négativement sa contribution.

Supposons à présent que ω est une 2-forme dans $\mathbf{R}^3 \times S^2$, à support dans $\gamma(\Omega) \times S^2$. On aura alors

$$N(S)(\omega) = [\mathcal{N}_S](\omega) = \int_{\Omega} \langle \omega(\Gamma(u)) | \partial_1 \Gamma(u) \wedge \partial_2 \Gamma(u) \rangle du - \int_{\Omega} \langle \omega(\tilde{\Gamma}(u)) | \partial_1 \tilde{\Gamma}(u) \wedge \partial_2 \tilde{\Gamma}(u) \rangle du.$$

Intéressons-nous d'abord à la première composante. L'application $u \mapsto n(u)$ peut s'écrire $n(u) = \nu(\gamma(u))$, où $\nu : S \rightarrow S^2$ est l'application de Gauss dont la différentielle peut être vue comme un endomorphisme symétrique de $T_{\gamma(u)}S$ correspondant à la deuxième forme fondamentale. Ses valeurs propres sont les courbures principales κ_1 et κ_2 de S en $\gamma(u)$, et on peut noter (e_1, e_2) la base de vecteurs propres associés. Remarquons qu'on a bien alors que $(e_1, e_2, n(u))$ forme une base orthonormée de \mathbf{R}^3 , comme précédemment dans la définition des formes ω_i . On a alors

$$\begin{aligned} \partial_1 \Gamma(u) \wedge \partial_2 \Gamma(u) &= (\partial_1 \gamma(u), D\nu(\gamma(u))\partial_1 \gamma(u)) \wedge (\partial_2 \gamma(u), D\nu(\gamma(u))\partial_2 \gamma(u)) \\ &= \det(D\gamma(u))(e_1, \kappa_1 e_1) \wedge (e_2, \kappa_2 e_2) \quad \text{par changement de base} \\ &= \det(D\gamma(u))[(e_1, 0) \wedge (e_2, 0) + \kappa_1(0, e_1) \wedge (e_2, 0) + \kappa_2(e_1, 0) \wedge (0, e_2) + \kappa_1 \kappa_2(0, e_1) \wedge (0, e_2)] \\ &= \det(D\gamma(u))[\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 + \kappa_1 \tilde{\varepsilon}_1 \wedge \varepsilon_2 + \kappa_2 \varepsilon_1 \wedge \tilde{\varepsilon}_2 + \kappa_1 \kappa_2 \tilde{\varepsilon}_1 \wedge \tilde{\varepsilon}_2], \end{aligned}$$

Les 2-vecteurs $\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2$, $\varepsilon_1 \wedge \tilde{\varepsilon}_2$, $\tilde{\varepsilon}_1 \wedge \varepsilon_2$ et $\tilde{\varepsilon}_1 \wedge \tilde{\varepsilon}_2$ forment une base orthonormée.

On voit donc sur la dernière formule qu'en évaluant la première composante sur la forme ω_0 on obtiendra $\int_{\Omega} \det(D\gamma(u))du$, c'est-à-dire l'aire de $\Gamma(\Omega)$, tandis qu'en évaluant sur ω_1 , respectivement ω_2 , on obtiendra l'intégrale de la courbure moyenne, respectivement de Gauss.

À présent pour la deuxième composante, on peut remarquer qu'elle correspondrait à la première composante dans le cas où l'on aurait inversé l'orientation de la paramétrisation locale, de sorte que les calculs précédents restent valables, à ceci près que les courbures κ_1 et κ_2 changent de signe en inversant l'orientation. Ceci implique qu'en évaluant sur les formes ω_i , on obtient les mêmes résultats que pour la première composante, mais avec un signe négatif pour la courbure moyenne. Au final, en additionnant les deux composantes, l'évaluation du cycle normal sur ω_0 fournit deux fois l'aire de S , l'évaluation sur ω_1 donne 0 et l'évaluation sur ω_2 donne deux fois l'intégrale de la courbure de Gauss.

Ceci montre que le cycle normal encode bien les courbures de la surface. Le fait que l'évaluation sur ω_1 donne une valeur nulle est en accord avec le fait que le cycle normal est une notion indépendante de l'orientation alors que la courbure moyenne l'est. Mais comme on l'a vu le cycle normal est localement composé de deux mesures à supports disjoints, chacune de ces composantes permettant bien de récupérer l'intégrale de la courbure moyenne.

Unions d'ensembles de type "positive reach"

La classe des ensembles de type "positive reach" contient les ensembles fermés convexes et les sous-variétés régulières, mais pas tous les ensembles réguliers par morceaux. La notion de cycle normal peut être étendue au cas d'ensembles qui sont des unions finies d'ensembles de type "positive reach". Ceci est nécessaire pour considérer des courbes ou surfaces régulières par morceaux, comme par exemple les chaînes polyédrales (unions de segments, surfaces triangulées).

La construction proposée dans [Z87, RZ01, Tha08] considère la classe \mathcal{U}_{PR} des ensembles qui sont des unions localement finies d'ensembles X_i , $i \in \mathbf{N}$, tels que pour tout sous-ensemble fini d'indices $I \subset \mathbf{N}$, $\cap_{i \in I} X_i$ est de "positive reach". En particulier cette classe contient évidemment l'ensemble de "positive reach", mais également toutes les unions finies d'ensembles convexes fermés non vides. Le cycle normal associé à un ensemble $X \in \mathcal{U}_{PR}$ peut être défini de façon récursive de telle manière que la propriété additive suivante soit satisfaite :

Definition 4 (Propriété additive). *Soient X, Y deux ensembles de type "positive reach" tels que $X \cap Y$ est également de type "positive reach". On définit alors*

$$N(X \cup Y) := N(X) + N(Y) - N(X \cap Y) \quad (3.2)$$

Dans le cas où $X \cup Y$ est également de type "positive reach", cette définition est cohérente avec la précédente. Dans le cas d'une union d'ensembles de type "positive reach", appartenant à \mathcal{U}_{PR} , il est facile de voir que toute combinaison d'unions et d'intersections des X_i appartient également à \mathcal{U}_{PR} , de sorte que la formule d'addition permet d'écrire une expression récursive pour le cycle normal de X , qui sert de définition dans ce cas : pour $1 \leq k \leq n$, on a

$$N(X_1 \cup \dots \cup X_k) = N(X_1 \cup \dots \cup X_{k-1}) + N(X_k) - N((X_1 \cup \dots \cup X_{k-1}) \cap X_k)$$

3.2.2 Métriques à noyaux sur les cycles normaux

Afin de pouvoir comparer les formes via leurs cycles normaux, on adopte alors la même stratégie que dans le modèle des courants de la section 3.1 en définissant une norme hilbertienne à noyau reproduisant sur l'espace des formes différentielles, puis en considérant sa norme duale. Dans le cas présent, le noyau doit être défini sur $\mathbf{R}^d \times S^{d-1}$, et un choix simple est de considérer un noyau scalaire obtenu comme produit de deux noyaux scalaires : pour tous $(x, u), (y, v) \in \mathbf{R}^d \times S^{d-1}$ et $\eta, \nu \in \Lambda^{d-1}(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$, on définit ainsi K_W par la formule

$$\langle K_W((x, u), (y, v))\eta, \nu \rangle = k_p(x, y)k_n(u, v) \langle \eta, \nu \rangle,$$

où k_p et k_n sont des noyaux de type positif sur \mathbf{R}^d et S^{d-1} . Le choix des noyaux k_p et k_n est très libre à condition de respecter une certaine régularité (voir [3], proposition 23). Le noyau k_p joue ici le même rôle que le noyau du modèle des courants ; on peut le choisir par exemple gaussien. Pour le noyau k_n le choix fait dans [3] est de considérer un noyau d'espace de Sobolev dont le développement en harmoniques sphériques est connu. Ce choix est cohérent avec la stratégie d'approximation utilisée pour évaluer la métrique dans le cas des unions de segments, dont nous parlons rapidement dans la section suivante.

3.2.3 Cycle normal d'une chaîne polyédrale et approximations discrètes

Cycle normal associé à un segment ou un triangle, et leurs unions

Soient $a, b \in \mathbf{R}^d$ et $C = [a, b]$ le segment d'extrémités a et b dans \mathbf{R}^d . On peut facilement voir que pour un tel ensemble, le fibré normal unitaire est décomposé en une partie "cylindrique" et deux parties "sphériques" :

$$\mathcal{N}_C = \mathcal{N}_C^{cyl} \cup \mathcal{N}_C^{sph}$$

avec $\mathcal{N}_C^{cyl} := \tilde{C} \times ((b-a)^\perp \cap S^{d-1})$ et $\mathcal{N}_C^{sph} := (\{a\} \times S_{a-b}^+ \cup \{b\} \times S_{b-a}^+)$. Ces deux parties sont disjointes et le cycle normal $N(C)$ vérifie $N(C) = N(C)^{cyl} + N(C)^{sph}$ avec $N(C)^{cyl} := [\mathcal{N}_C^{cyl}]$ et $N(C)^{sph} := [\mathcal{N}_C^{sph}]$.

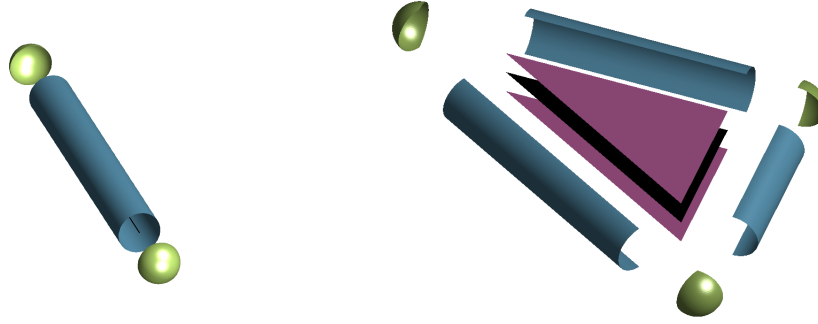


FIGURE 3.4 – Illustration des fibrés normaux unitaires associés à un segment et à un triangle. Les différentes parties "planaires", "cylindriques" et "sphériques" sont représentées avec des couleurs différentes. Ces parties sont orthogonales entre-elles pour les métriques à noyau considérées.

Considérons à présent un triangle T , de sommets x_1, x_2, x_3 et arêtes : $f_1 = x_2 - x_1$, $f_2 = x_3 - x_2$, $f_3 = x_1 - x_3$. Les deux vecteurs normaux unitaires en tout point non extrémal sont : $n_T = \frac{f_1 \times f_2}{|f_1 \times f_2|}$ et $-n_T$. La description du fibré normal unitaire du triangle est encore une fois immédiate. Comme illustré sur la figure 3.4, il peut être décomposé en une partie "planaire", composée de deux triangles, une partie cylindrique, composée de trois demi-cylindres positionnés aux arêtes, et une partie sphérique, composée de trois portions de sphère situées aux sommets :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_T^p &:= \cup_{x \in T \setminus \partial T} \text{Nor}^u(T, x) = T \times \{-n_T, n_t\}, \\ \mathcal{N}_T^c &:= \cup_{i=1}^3 [x_i, x_{i+1}] \times S_{f_i, f_i \times n_T}^{\perp+}, \\ \mathcal{N}_T^s &:= \cup_{i=1}^3 \{x_i\} \times S_{f_{i-1}, -f_{i+1}}^+, \end{aligned}$$

où pour tous vecteurs $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^3$ non nuls, on a noté $S_{\alpha, \beta}^{\perp+} = (S^2 \cap \alpha^\perp) \cap \{u \mid \langle u, \beta \rangle \geq 0\}$ (demi-cercle), et $S_{\alpha, \beta}^+ := \{u \in S^2, \langle u, \alpha \rangle \geq 0, \langle u, \beta \rangle \geq 0\}$ (portion de sphère).

A final si l'on considère des formes données par des courbes polygonales ou des surfaces triangulées, la formule d'addition 3.2 permet d'obtenir une décomposition de leur cycle normal en composantes élémentaires planaires, cylindriques et sphériques du même type. Au passage, afin d'obtenir une décomposition simplifiée en composantes disjointes, il est utile de définir les cycles normaux associés à des ensembles non fermés : segment sans ses extrémités, triangle privé de son bord. On réfère à [3] pour plus de détails.

Evaluation de la métrique pour des formes discrétisées

L'évaluation de la métrique définie par le noyau K_W sur des formes données par des unions de segments ou de triangles est nécessaire pour obtenir une formule utilisable comme terme d'attache aux données. Comme dans la méthode des courants, on peut pour cela considérer des courants définis à partir de fonctionnelles d'évaluation et proches des cycles normaux sur lesquels on doit calculer la métrique. Cependant ici les deux espaces \mathbf{R}^d et S^{d-1} ne jouent pas le même rôle, et s'il est possible de raffiner une discrétisation spatialement en réduisant la taille des éléments finis, ce n'est pas envisageable en ce qui concerne la courbure. La stratégie consiste donc à approcher les intégrations dans le domaine spatial par une évaluation unique au centre de l'élément, tandis que

les intégrations sur S^{d-1} sont conservées dans le modèle discret, pour ensuite être approchées via un développement en harmoniques sphériques tronqué à un certain ordre.

Je ne développe pas plus dans cette partie les détails de cette approximation ainsi que les calculs menant à la formule donnant un terme d'attache utilisable dans les algorithmes d'appariement. Dans le cas des courbes, voici la formule finale exprimant le produit scalaire entre deux unions de segments.

Soient donc S et T deux unions de segments, ne s'intersectant qu'en leurs extrémités. On note n_S, n_T leurs nombres de segments et n_S, n_T leurs nombres de sommets, $N(S)$ et $N(T)$ leurs cycles normaux et $N(S)_{approx}$ et $N(T)_{approx}$ les courants approchés correspondant. On a

$$\langle N(S)_{approx}, N(T)_{approx} \rangle_{W'} = \langle N(S)_{approx}^{cyl}, N(T)_{approx}^{cyl} \rangle_{W'} + \langle N(S)^{sph}, N(T)^{sph} \rangle_{W'}$$

avec

$$\langle N(S)_{approx}^{cyl}, N(T)_{approx}^{cyl} \rangle_{W'} = \sum_{i=1}^{n_S} \sum_{j=1}^{n_T} k_p(c_i, d_j) \langle f_i, g_j \rangle \sum_{m \geq 0} a_m \cos(m\theta_{ij}) \quad (3.3)$$

et

$$\begin{aligned} \langle N(S)^{sph}, N(T)^{sph} \rangle_{W'} &= \sum_{k=1}^{N_S} \sum_{l=1}^{N_T} k_p(x_k, y_l) \left(1 - \frac{n_{x_k} + n_{y_l}}{2} \right) \beta \\ &+ \sum_{i=1}^{n_S} \sum_{j=1}^{n_T} \sum_{a,b=1}^2 \left(b_0 + (-1)^{a+b} \sum_{m \geq 0} b_m \cos(m\theta_{ij}) \right) k_p(x_{f_i^a}, y_{g_j^b}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

où les $x_k, 1 \leq k \leq N_S$ (respectivement $y_l, 1 \leq l \leq N_T$) sont les sommets de S (resp. T), les $c_i, 1 \leq i \leq n_S$ (resp. $d_j, 1 \leq j \leq n_T$) sont les centres des segments de S (resp. T), n_{x_k} (resp. n_{y_l}) est le nombre de segments adjacents au sommet x_k (resp. y_l). Les coefficients β, a_m, b_m sont liés au noyau k_n ; ils peuvent être pré-calculés à partir de leurs développements en harmoniques sphériques.

Exemples numériques

Les figures 3.2.3 et 3.2.3 montrent quelques exemples d'appariements de courbes et de surfaces obtenus en utilisant une métrique à noyau sur les cycles normaux comme terme d'attache.

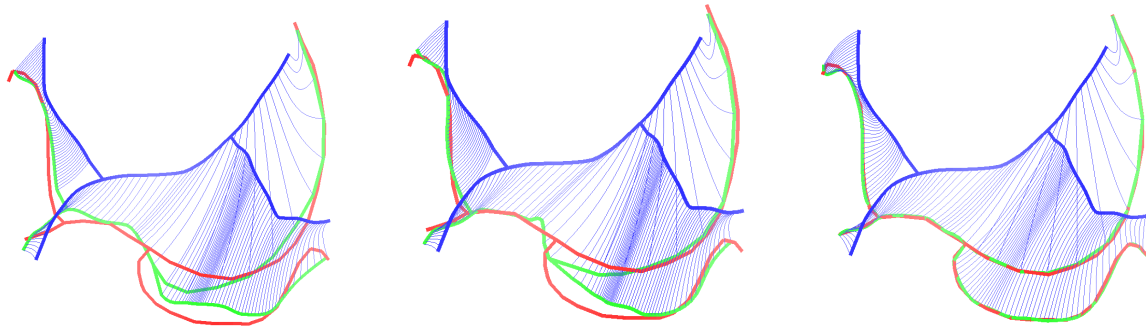


FIGURE 3.5 – Comparaison des recalages de deux courbes synthétiques avec branchements pour une métrique de courants (à gauche), une métrique varifolds (centre) et une métrique de cycles normaux (à droite). En bleu la courbe initiale, en rouge la courbe cible, en vert la courbe recalée. Les traits en bleu fin correspondent aux trajectoires des points de discrétisation de la courbe initiale

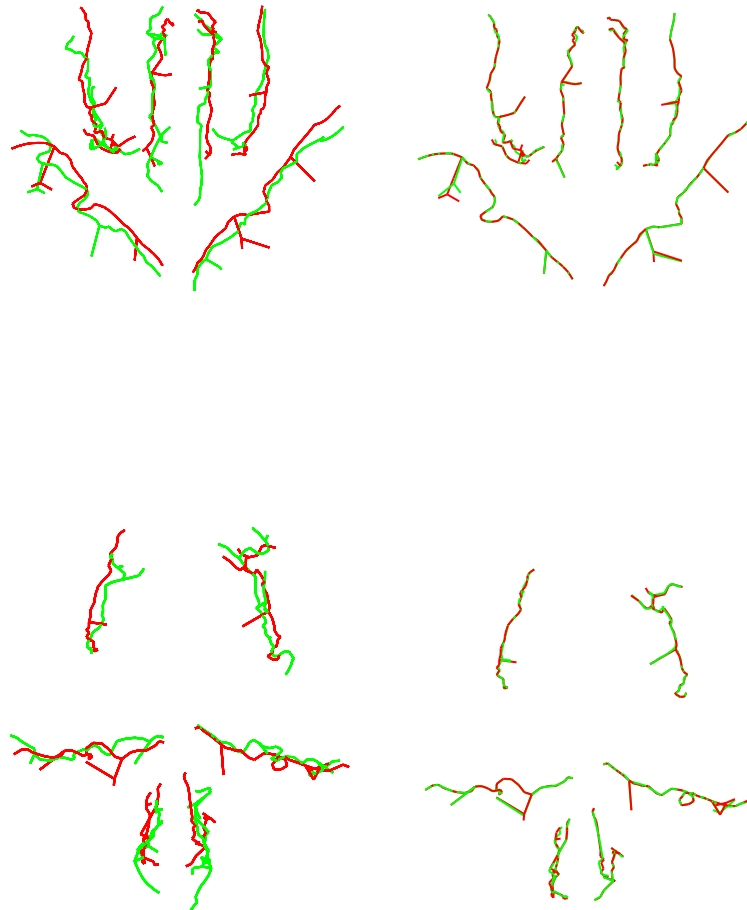


FIGURE 3.6 – Recalage de sillons corticaux en utilisant les métriques sur les cycles normaux. Chaque ligne correspond à une vue différente. En rouge : courbes cibles, composées de 6 sillons corticaux (3 par hémisphère cérébral), en vert : courbes initiales (image de gauche) et recalées (à droite). Le recalage est très bon malgré la complexité géométrique. La métrique basée sur la courbure permet de pondérer fortement les points de branchements des courbes à apparier.

Méthodes d'estimation de forme prototype

Nous abordons ici la problématique centrale en morphométrie qui est celle de l'analyse d'une population de formes : étant donnée des formes S_k , $1 \leq k \leq N$ similaires, c'est-à-dire par exemple correspondant à différentes observations d'un même organe chez plusieurs individus, et disposant du cadre théorique et des outils numériques déjà évoqués, comment effectuer une analyse de la population afin de caractériser sa variabilité au sens des déformations, identifier automatiquement des formes pathogènes, ou toute autre analyse d'ordre statistique.

Une approche usuelle dans le cas des modèles difféomorphiques consiste à estimer une forme référence T ainsi que les déformations entre cette forme et les différents individus, et baser l'analyse statistique sur les paramètres de ces déformations. L'estimation de cette forme prototype est en fait souvent effectuée conjointement à l'estimation des déformations.

4.1 Introduction : revue bibliographique des différentes approches

La problématique traitée ici est donc celle du calcul d'une forme prototype à partir d'une population de formes observées. Autrement dit, étant donnée une population de formes S_1, \dots, S_N , comment définir et déterminer une forme T qui soit moyenne au sens des déformations ou des critères géométriques de comparaison utilisés. Ceci est extrêmement vague ; en fait on peut voir ce problème sous différents angles, qui peuvent orienter différemment les définitions ou les méthodes utilisées pour l'aborder :

- au sens du co-recalage : on cherche à généraliser la problématique du recalage d'une forme sur une autre : on cherche à présent à "recaler ensemble" les N formes, c'est-à-dire déterminer des déformations ϕ_n telles que les formes transportées $\phi_n(S_n)$ soient proches les unes des autres.
- au sens de calcul de moyennes dans les espaces de formes / variétés riemanniennes.
- au sens statistique : on se donne un modèle probabiliste d'observation, généralement de la forme $S = \phi(T) + W$, où S est la forme observée aléatoire, T la forme prototype inconnue, ϕ une déformation inconnue, et W un bruit résiduel (tout ceci demandant d'être précisément défini). On cherche alors à estimer T ainsi que les autres paramètres.

Différents types de méthodes ont été proposées dans la littérature. On pourra citer notamment l'approche "backward" (co-recalage) [JM00], décrite dans la partie suivante, l'approche "forward" [DPTA08], qui part de l'interprétation statistique, l'approche basée sur l'utilisation d'un "hyper-prototype" (*hypertemplate*) [MMTY08].

4.2 Algorithme "rétrograde" pour les mesures et courants

La méthode présentée dans [4] permet l'estimation d'un prototype à partir d'une collection de formes, et s'appuie sur le cadre des métriques à noyaux sur les mesures ou les courants. Elle a été par la suite utilisée dans différentes études applicatives [6, 5] dont nous reparlerons au chapitre 5.

On se place dans le cadre du modèle de recalage par les courants (cf section 3.1). Soient S_1, \dots, S_N des ensembles rectifiables. On définit la fonctionnelle de co-recalage comme

$$J(\mathbf{T}, \phi_1, \dots, \phi_N) = \sum_{k=1}^N \gamma E(\phi_k) + \|\phi_k(S_k) - \mathbf{T}\|_{W'}^2, \quad (4.1)$$

où $\mathbf{T} \in W'$, $\phi_k \in \mathcal{A}_V$.

L'algorithme suivant consiste en une optimisation alternée sur les différentes entrées de la fonctionnelle. L'optimisation sur un difféomorphisme ϕ_n , toutes autres entrées étant fixées, revient à un problème d'appariement classique. L'optimisation sur une forme \mathbf{T}_k spécifique consiste à calculer la moyenne des mesures ou courants associés aux formes appartenant à la classe k , transportées par les difféomorphismes.

Algorithme 3 Algorithme d'estimation de prototype

- 1: Choix de $\mathbf{T} \in W'$ initial (par exemple $\mathbf{T}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [S_n]$).
 - 2: **Répéter** :
 - 3: Calculs des ϕ_n appariements de S_n vers \mathbf{T} pour $1 \leq n \leq N$.
 - 4: On pose $\mathbf{T} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [\phi_n \cdot S_n]$.
 - 5: **jusqu'à critère d'arrêt**
-

La figure 4.2 montre plusieurs exemples de calculs de prototypes obtenus suivant ce procédé. La forme prototype T obtenue en fin de processus n'est pas une forme au sens classique mais une collection de formes proches les unes des autres géométriquement. Cependant elle est bien définie dans l'espace des courants, en tant que combinaison linéaire de courants associés à des surfaces, et du point de vue de l'analyse statistique des déformations elle est parfaitement utilisable en tant que forme prototype.

4.3 Méthode du barycentre itéré

Cette partie résume le travail présenté dans la publication [5], et précédemment introduit dans l'article court [13].

Le calcul d'un prototype dans le cadre LDDMM et pour des applications réelles en anatomie numérique est une opération numérique lourde, pouvant nécessiter plusieurs heures voire plusieurs jours de calculs. On est alors amené à imaginer des méthodes plus rapides permettant soit d'initialiser la méthode de calcul du prototype, soit de la remplacer. En effet, le but de l'estimation de prototype est celui de l'analyse statistique des déformations d'une population de formes, analyse qui dans le cadre LDDMM peut être effectuée par l'analyse des vecteurs moments initiaux positionnés sur la forme prototype. Cette analyse effectuée sur l'espace tangent à cette forme, donc linéarisée, ne peut être qu'approchée puisque les données se trouvent elles sur une variété courbe. De ce fait, on peut considérer, même si une étude précise serait nécessaire pour l'affirmer,

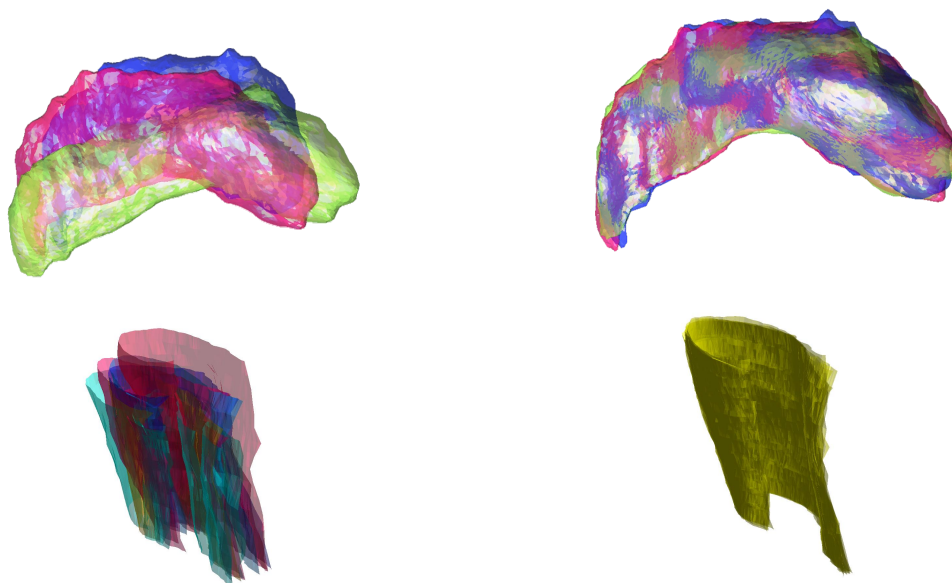


FIGURE 4.1 – Exemples de co-recalages obtenus avec l’algorithme 3 sur des données de surfaces, effectuées pour différentes études applicatives. A gauche les formes initiales, à droite les formes co-recalées. Première ligne : hippocampes cérébraux [4]. Deuxième ligne : sections d’hippocampes segmentées sur des images IRM à haut champ [Ger12].

que le choix d’une forme prototype ou d’une autre, dans la mesure où celles-ci sont globalement correctement centrées, n’a que peu d’influence sur la qualité des résultats d’analyse statistiques effectués ensuite. L’idée est donc alors de chercher une méthode rapide tout en garantissant une certaine proximité avec la forme prototype idéale. Bien entendu, le temps de calcul d’une telle méthode d’initialisation doit être substantiellement inférieur à celui d’un véritable calcul de forme prototype. La méthode du barycentre itéré présentée ici effectue cette initialisation à l’aide de seulement $N - 1$ appariements simples.

Le cadre LDDMM, dans sa forme idéale (appariements exacts entre formes), définit le problème de l’estimation de prototype comme celui du calcul d’un centroïde sur une variété Riemannienne, variété étant de dimension finie dans le cas discret (nous limitons notre analyse à ce cas dans ce qui suit). La moyenne de Fréchet est le moyen classique de définir un tel centroïde et fournit l’idée directrice de toutes les méthodes d’estimation de prototype dans le cadre LDDMM. Comme la méthode de Barycentre Itéré présentée ici est aussi inspirée par des considérations sur le calcul de centroïdes dans l’espace Euclidien et leurs analogues sur des variétés Riemanniennes, nous allons brièvement discuter ces idées dans ce qui suit.

Calcul de centroïde sur les espaces euclidiens et riemanniens. Si $x_i, 1 \leq i \leq N$ sont des points dans \mathbf{R}^d , alors leur centroïde est défini comme

$$b_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (4.2)$$

Il vérifie aussi que

$$b_N = \operatorname{argmin}_{y \in \mathbf{R}^d} \sum_{1 \leq i \leq N} \|y - x_i\|^2. \quad (4.3)$$

A présent, si l'on considère des points x_i sur une variété Riemannienne M (on suppose que M est connexe par arcs et géodésiquement complet), cette définition de b_N ne peut pas être utilisée puisque M n'est pas un espace vectoriel. Cependant la caractérisation variationnelle de b_N a un analogue, ce qui conduit à la définition de la moyenne de Fréchet, aussi appelée 2-moyenne, qui est définie de manière unique sous certaines conditions (voir [ADPY12]) sur les positions des points x_i sur la variété :

$$b_N = \operatorname{argmin}_{y \in M} \sum_{1 \leq i \leq N} d_M(y, x_i)^2. \quad (4.4)$$

Beaucoup d'études mathématiques (par exemple Kendall [Ken90], Karcher [Kar77] Le [Le04], Afsari [Afs11, ATV13]), se sont concentrées sur la preuve d'existence et d'unicité de la moyenne, ainsi que sur la proposition d'algorithmes pour la calculer. La notion plus générale de p -moyenne d'une mesure de probabilité μ sur une variété riemannienne M est définie comme :

$$b = \operatorname{argmin}_{x \in M} F_p(x), \quad F_p(x) = \int_M d_M(x, y)^p \mu(dy). \quad (4.5)$$

Arnaudon et al. [ADPY12] ont proposé en 2012, dans le cas $p \geq 1$ un algorithme stochastique qui converge presque sûrement vers la p -moyenne de la mesure de probabilité μ . Cet algorithme ne demande pas de calculer le gradient de la fonctionnelle F_p à minimiser. Les auteurs construisent une chaîne de Markov inhomogène en choisissant à chaque étape un point aléatoire P de distribution μ puis en déplaçant le point courant X vers une nouvelle position le long de la géodésique liant X à P . Comme il sera évident dans ce qui suit, la méthode du barycentre itéré présente des similarités avec cette méthode dans le cas $p = 2$, en ce qu'elle utilise aussi un procédé itératif qui à chaque étape change la position courante vers une nouvelle position le long de la géodésique. Cependant notre méthode n'est pas stochastique et ne calcule pas la 2-moyenne des points. De plus elle se termine après $N - 1$ itérations, contrairement à la méthode stochastique ne garantie pas que tous les sujets de la population ont été pris en compte après N itérations.

D'autres définitions de centroïdes dans un cadre Riemannien peuvent être proposés. Les idées suivantes sont plus directement reliées à notre méthode. Revenant au cas Euclidien, on peut observer que b_N vérifie la relation itérative suivante :

$$\begin{cases} b_1 = x_1 \\ b_{k+1} = \frac{k}{k+1}b_k + \frac{1}{k+1}x_{k+1}, \quad 1 \leq k \leq N - 1, \end{cases} \quad (4.6)$$

qui a l'avantage qu'à chaque étape b_k est le barycentre des $x_i, 1 \leq i \leq k$. Ce procédé itératif a un analogue dans le cas Riemannien, car il est possible d'interpréter la combinaison convexe $\frac{k}{k+1}b_k + \frac{1}{k+1}x_{k+1}$ comme un point situé le long de la géodésique liant b_k à x_{k+1} , à une distance égale à $\frac{1}{k+1}$ fois la longueur totale de la géodésique, ce que l'on peut noter $\operatorname{geod}(b_k, x_{k+1}, \frac{1}{k+1})$. Ceci conduit à la définition suivante dans le cas Riemannien :

$$\begin{cases} \tilde{b}_1 = x_1 \\ \tilde{b}_{k+1} = \operatorname{geod}(\tilde{b}_k, x_{k+1}, \frac{1}{k+1}), \quad 1 \leq k \leq N - 1, \end{cases} \quad (4.7)$$



FIGURE 4.2 – Calculs de centres sur la sphère. En noir : 10 points tirés aléatoirement sur la sphère. En bleu : points obtenus par tir géodésique depuis chacun des points dans la direction du gradient de la fonctionnelle minimisée par la moyenne de Fréchet. En rouge : centroïdes obtenus par le procédé de barycentre itéré (4.7) avec différents ordres des points. En vert : moyenne de Fréchet des 10 points. Tous ces centres seraient confondus dans le cas d’une géométrie euclidienne.

Bien entendu cette nouvelle définition du centroïde ne coïncide pas avec la moyenne de Fréchet lorsque la métrique n’est pas Euclidienne, et de plus elle a le désavantage de dépendre de l’ordre des points x_i . De plus on peut considérer d’autres procédures itératives comme celle consistant à calculer des points milieux entre des paires de points x_i arbitraires, puis les points milieux des points milieux, etc. En d’autres termes, toutes les procédures basées sur la décomposition de l’égalité Euclidienne $b_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ comme une suite de combinaisons convexes à deux termes donnent des définitions alternatives de centroïde dans un cadre Riemannien. Sur la base de ces remarques, Emery et Mokobodzki [EM91] ont proposé de définir le centroïde non comme un point unique mais comme l’ensemble B_N des points $x \in M$ vérifiant

$$f(x) \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i), \quad (4.8)$$

pour toute fonction convexe f sur M , une fonction convexe étant définie par la propriété que sa restriction à toute géodésique est convexe. Cet ensemble B_N prend en compte les centroïdes obtenus par des procédures toutes les formes, i.e. récursives par paires, ou itératives comme expliquées précédemment.

Pour illustrer ces différentes notions, on peut voir sur la figure 4.2 une simulation à partir de $N = 10$ points tirés aléatoirement sur la sphère unité. Les différents centroïdes obtenus en choisissant des permutations aléatoires des points forment un nuage de points ramassé autour de la moyenne de Fréchet des 10 points. Ces centroïdes sont notamment mieux centrés que les points obtenus en effectuant un tir géodésique dans la direction du gradient de la fonctionnelle depuis l’un des points, pour le même coût calculatoire ($N - 1$ calculs de géodésiques).

Principe de la méthode La méthode du barycentre itéré consiste formellement à appliquer la procédure suivante : étant donnée une collection de N formes S_i , on met à jour itérativement le centroïde en effectuant son appariement sur la forme suivante et en la déplaçant le long du flot géodésique. Nous proposons deux procédés alternatifs pour l’étape de mise à jour (algorithmes 1 et 2 ci-dessous).

Barycentre Itéré Direct : IC1 La première version de la méthode calcule un centroïde entre deux objets O_1 et O_2 en transportant O_1 le long de la géodésique allant de cet objet à O_2 . Le transport est stoppé en fonction des poids des objets. Si le poids de O_1 est w_1 , et le poids de O_2 est w_2 avec $w_1 + w_2 = 1$, on stoppe la déformation de O_1 au temps $t = w_2$. Comme la méthode est itérative, les deux premiers objets sont des sujets de la population, pour l'étape suivante nous avons comme premier objet le centroïde précédent et comme deuxième objet un nouveau sujet de la population. L'algorithme procède comme présenté dans l'Algorithme 4.

Algorithme 4 Barycentre Itéré 1 (IC1)

- 1: Entrée : N surfaces S_i
 - 2: Sortie : 1 surface B_N représentant le centroïde de la population $B_1 = S_1$
 - 3: **Pour** i de 1 à $N - 1$ **Faire**
 - 4: B_i est apparié sur S_{i+1} , ce qui permet d'obtenir une déformation $\phi_{v_i}(x, t)$.
 - 5: On définit $B_{i+1} = \phi_{v_i}(B_i, \frac{1}{i+1})$ ce qui signifie qu'on transporte B_i le long de la géodésique et on arrête au temps $t = \frac{1}{i+1}$
 - 6: **fin Pour**
-

La figure 4.3 montre l'idée de l'algorithme et un résultat obtenu pour des surfaces hippocampiques.

Barycentre Itéré avec moyennage dans l'espace des courants : IC2 Du fait de l'inexactitude des appariements, le centroïde calculé avec la méthode proposée ci-dessus accumule les petites erreurs, ce qui peut avoir un impact sur le centroïde final. De plus, le centroïde calculé avec l'algorithme 4 est en fait une déformation de la première forme S_1 , ce qui rend la procédure encore plus dépendante de l'ordre des sujets qu'elle ne le serait dans une situation idéale d'appariement exact. Dans ce deuxième algorithme, on modifie l'étape de mise à jour en calculant une moyenne dans l'espace des courants entre la déformation du centroïde courant et le flot rétrograde de la forme courante vers laquelle on effectue l'appariement. Ainsi le centroïde calculé n'est pas une surface mais une combinaison de surfaces, comme dans la méthode de co-recalage de la partie 4.2. Les poids choisis dans le moyennage reflètent l'importance relative de la nouvelle forme, de telle manière qu'à la fin de la procédure, toutes les formes formant le centroïde ont des poids égaux à $\frac{1}{N}$. L'algorithme procède comme présenté dans l'Algorithme 5.

Algorithme 5 Barycentre Itéré 2 (IC2)

- 1: Entrée : N surfaces S_i
 - 2: Sortie : 1 courant \mathcal{B}_N représentant le centroïde de la population $\mathcal{B}_1 = [S_1]$
 - 3: **Pour** i de 1 à $N - 1$ **Faire**
 - 4: \mathcal{B}_i est apparié à S_{i+1} , ce qui donne une déformation $\phi_{v_i}(x, t)$
 - 5: On définit $\mathcal{B}_{i+1} = \frac{i}{i+1} * \phi_{v_i}(\mathcal{B}_i, \frac{1}{i+1}) + \frac{1}{i+1} [\phi_{u_i}(S_{i+1}, \frac{i}{i+1})]$ ce qui signifie que l'on transporte \mathcal{B}_i le long de la géodésique et que l'on stoppe au temps $t = \frac{1}{i+1}$ où $u_i(x, t) = -v_i(x, 1 - t)$, i.e. ϕ_{u_i} est le flot rétrograde.
 - 6: **fin Pour**
-

Remarquons que nous avons utilisé la notation $\phi_{v_i}(\mathcal{B}_i, \frac{1}{i+1})$ pour noter le transport (*push-forward*) du courant \mathcal{B}_i par le difféomorphisme. Ici \mathcal{B}_i est une combinaison linéaire de courants

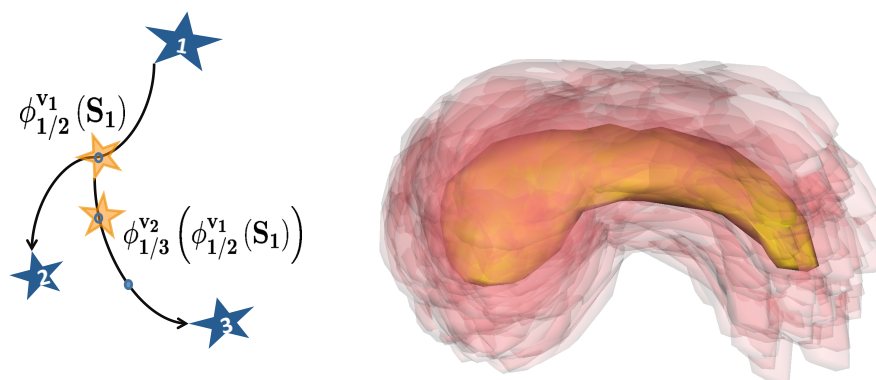


FIGURE 4.3 – Méthode des barycentres itérés (algorithme IC1). A gauche, schéma de la méthode : une des formes de la population est déformée par appariements successifs ; à droite, exemple de calcul pour la population de surfaces d'hippocampes cérébraux considérée dans l'article [5]

associés aux surfaces, et le courant transporté est la combinaison linéaire (en gardant les poids constants) des courants associés aux surfaces transportées.

Une méthode alternative : Barycentre par paires (PW) Une autre possibilité est de grouper les objets par paires, calculer les centroïdes pour chaque paire (points milieux), et ensuite récursivement appliquer la même procédure à l'ensemble des centroïdes, jusqu'à ce qu'il ne reste qu'un seul centroïde. Cette méthode par paires dépend également de l'ordre des sujets, et fournit également un centroïde qui vérifie la définition de Emery et Mokobodzki (en négligeant le fait que les appariements sont inexacts).

Lorsque la population est composée de plus de trois sujets, on divise la population en deux parties et on applique récursivement le même procédé de division jusqu'à n'avoir plus que deux ou trois objets dans chaque groupe. On applique alors l'algorithme 4 pour obtenir le centroïde correspondant avant de remonter l'arbre dyadique, en faisant attention au poids de chaque objet. Cet algorithme itératif est décrit dans l'algorithme 6. L'intérêt principal est que le calcul devient alors partiellement parallélisable, permettant d'envisager dans l'idéal un temps de calcul en $\log(N)$ si l'on dispose de $N/2$ machines pouvant travailler simultanément.

Algorithme 6 Barycentre par Paires

- 1: Entrée : N surfaces S_i
 - 2: Sortie : 1 surface B représentant le centroïde de la population
 - 3: **Si** $N \geq 2$ **Alors**
 - 4: $B_{left} = \text{Barycentre par Paires } (S_1, \dots, S_{\lfloor N/2 \rfloor})$ $B_{right} = \text{Barycentre par Paires } (S_{\lfloor N/2 \rfloor + 1}, \dots, S_N)$ B_{left} est apparié sur B_{right} ce qui donne une déformation $\phi_v(x, t)$
 - 5: On définit $B = \phi_v(B_{left}, \frac{\lfloor N/2 \rfloor + 1}{N})$ ce qui signifie que l'on transporte B_{left} le long de la géodesique et que l'on stoppe au temps $t = \frac{\lfloor N/2 \rfloor + 1}{N}$
 - 6: **Sinon**
 - 7: $B = S_1$
 - 8: **fin Si**
-

4.4 Estimation multi-prototypes : un algorithme inspiré des k-means

Nous présentons ici rapidement une méthode étudiée pendant le stage de deuxième année de Master de Claire Cury, qui est une extension de la méthode présentée en 4.2 à l'estimation conjointe de plusieurs prototypes de formes. Estimer plusieurs prototypes à partir d'une population de formes est une approche naturelle pour prendre en compte de manière plus pertinente la variabilité anatomique intrinsèque à la population. Des méthodes ont été proposées [ADK15].

Une extension naturelle de la fonctionnelle 4.1 au cas multi-prototypes est obtenue en considérant que la population est partitionnée en K classes, associées à K formes prototypes. On obtient ainsi la formulation :

$$J(\sigma, \mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_K, \phi_1, \dots, \phi_N) = \sum_{n=1}^N \gamma E(\phi_n) + \|\phi_n(S_n) - \mathbf{T}_{\sigma(n)}\|_{W'}^2, \quad (4.9)$$

où σ est une application de $\{1, \dots, N\}$ dans $\{1, \dots, K\}$ donnant la classe attribuée à chaque individu, $\mathbf{T}_k \in W'$ sont les K formes prototypes, ϕ_n le difféomorphisme transportant la forme S_n sur le prototype associé à sa classe $\mathbf{T}_{\sigma(n)}$.

En s'inspirant de l'algorithme des k-moyennes, on peut proposer l'extension suivante de l'algorithme 3 :

Algorithme 7 Algorithme multi-prototypes

- 1: Choix de $\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_K \in W'$ initiaux quelconques (par exemple $\mathbf{T}_k = [S_k]$, $1 \leq k \leq K$).
 - 2: **Répéter :**
 - 3: Calculs des ϕ_n^k appariements de S_n vers T_k pour $1 \leq n \leq N$, $1 \leq k \leq K$.
 - 4: On pose $\sigma(n) = \operatorname{argmin}\{E(\phi_n^k), 1 \leq k \leq K\}$ pour tout n , $1 \leq n \leq N$.
 - 5: On pose $\phi_n = \phi_n^{\sigma(n)}$ pour tout n , $1 \leq n \leq N$.
 - 6: On pose $\mathbf{T}_k = \frac{1}{\#\sigma^{-1}(k)} \sum_{n \in \sigma^{-1}(k)} [\phi_n^k \cdot S_n]$.
 - 7: **jusqu'à critère d'arrêt**
-

Un examen simple de la fonctionnelle 4.9 montre que les étapes 2 et 3 de la boucle donnent en fait l'affectation σ et les difféomorphismes ϕ_n optimaux lorsque les formes \mathbf{T}_k sont fixées ; tandis que l'étape 4 calcule les formes \mathbf{T}_k optimales pour des σ et ϕ_n fixés. Ainsi cet algorithme consiste en fait à alterner optimisation sur les \mathbf{T}_k puis conjointement sur les σ et les ϕ_n .

Études Applicatives

Je présente dans ce chapitre deux projets applicatifs issus de mes collaborations avec différentes équipes depuis 2006.

5.1 Co-recalage du cerveau basé sur les sillons corticaux : la méthode DISCO

Cette partie résume le travail effectué en collaboration principalement avec le laboratoire LENA à l'hôpital Pitié-Salpêtrière, et qui constituait le travail de thèse de Guillaume Auzias. Il a mené à plusieurs publications dans des conférences [15, 16], ainsi qu'un article principal dans IEEE transactions on Medical Imaging en 2011 ([6]). La méthode DISCO (Diffeomorphic Sulcal-Based COrtical) permet un co-recalage global inter-individuel de surfaces corticales en utilisant l'information de positionnement des sillons corticaux, ayant été segmentés et labellisés automatiquement suivant la technique proposée dans [RMPO⁺02], et améliorée dans [PRTM09].

Nous pouvons résumer très grossièrement l'ensemble des étapes de la méthode : les données d'entrée sont des images d'IRM anatomiques de cerveaux de différents sujets, à partir desquels sont extraits d'une part les surfaces corticales (ce qui permet d'obtenir une surface triangulée par sujet représentant la surface extérieure du cerveau), ainsi que les "rubans sulcaux" labellisés en utilisant la technique de Denis Rivière ([RMPO⁺02]), qui utilise une technique d'apprentissage à base de réseaux de neurones. Ces rubans consistent en des surfaces délimitées d'une part par les lignes sulcales de chaque individu et leurs projections sur l'enveloppe sphérique du cerveau, comme visible sur la figure 5.1. Le point le plus important est que ces surfaces sont automatiquement labellisées, autrement dit chaque ruban sulcal repéré correspond à une ligne sulcale connue par les anatomistes, ce qui permet donc de mettre en correspondance ces objets entre les individus. A partir de ces rubans, on extrait les contours, puis une étape de clustering par K-moyennes permet de réduire le nombre de points de discrétisation. Ces ensembles de points sont ensuite simplifiés par une méthode de recherche de plus court chemin. On obtient ainsi, pour chaque ruban sulcal, deux ensembles de points correspondant à la ligne sulcale d'une part et à sa projection d'autre part (voir figure 5.1).

C'est à ce stade qu'interviennent les méthodes de co-recalage diffeomorphique. Chaque nuage de point $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est modélisé en tant que somme de masses de Dirac $\mu = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{x_i}$, où a_i est un poids adapté, afin d'obtenir une densité de masse proche d'une distribution uniforme le long de la ligne sulcale. Le co-recalage global du cerveau est obtenu ensuite en minimisant la

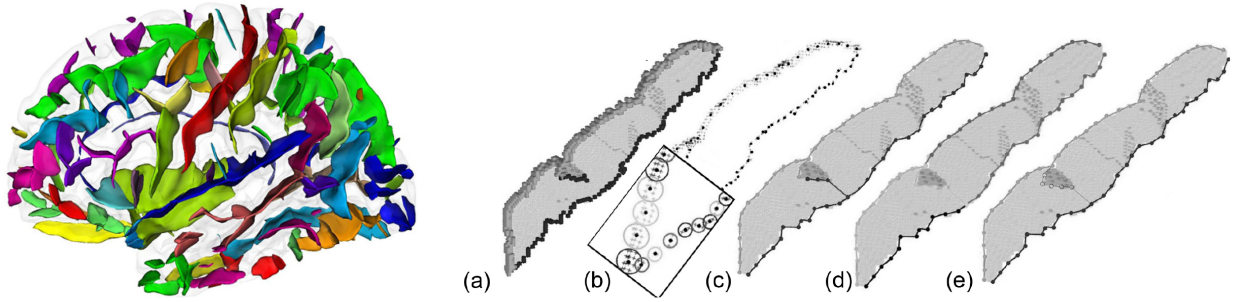


FIGURE 5.1 – A gauche : extraction automatique et labellisation des sillons corticaux. Chaque ruban coloré correspond à une ligne sulcale segmentée sur l'image IRM et identifiée à partir d'une base d'apprentissage de sillons anatomiques connus. A droite : étapes d'extraction et de simplification des bords des rubans sulcaux. Les points frontières obtenus fourniront ensuite les données d'entrée pour l'étape de recalage basée sur la méthode des mesures.

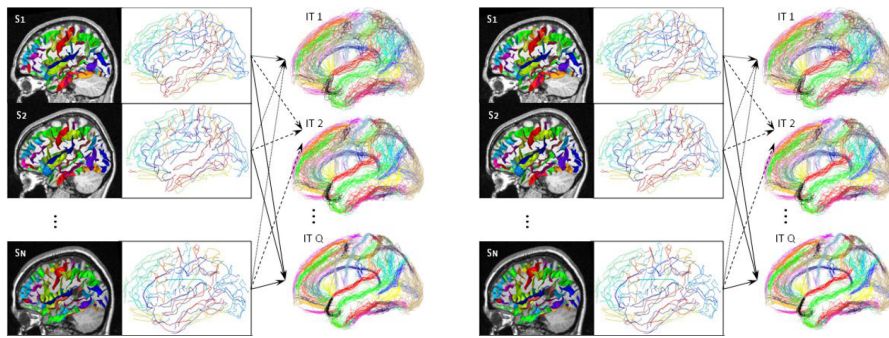


FIGURE 5.2 – Résultats obtenus avec la méthode DISCO. Les lignes sulcales des différents individus sont progressivement co-recalées au cours des itérations.

fonctionnelle multi-difféomorphiques et multi-cibles suivante :

$$J(\phi_1, \dots, \phi_N, \bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_{n_S}) = \sum_{k=1}^N \left\{ \gamma d(\text{id}, \phi_k)^2 + \sum_{j \in I_k} \|\phi_k \cdot \mu_{kj} - \bar{\mu}_j\|_{I^*}^2 \right\},$$

où μ_{kj} correspond au nuage de point d'index j de l'individu numéro k . Notons qu'en fait l'étape de labellisation automatique des sillons corticaux ne donne pas toujours le même nombre de sillons entre individus. Autrement dit certains sillons sont présents chez certains individus et absents chez d'autres. Nous avons donc numéroté $1, \dots, n_S$ l'ensemble de tous les sillons, et I_k le sous-ensemble des sillons présents chez l'individu k .

La figure 5.2 montre quelques résultats obtenus avec la méthode DISCO.

La méthode DISCO est incluse dans la librairie de neuroimagerie BrainVisa [RGD⁺09, GRD⁺11].

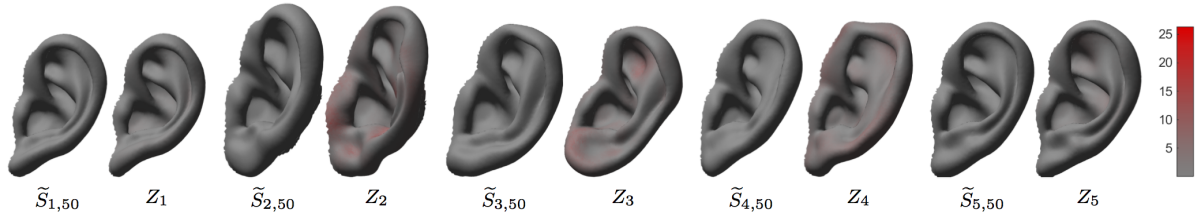


FIGURE 5.3 – Un résultat de la méthode d’analyse morphométrique de l’oreille humaine. Les surfaces Z correspondent aux déformations de la surface prototype (estimée auparavant) sur les différentes surfaces de la base (non représentées mais très proches). Les surfaces S correspondent aux reconstructions obtenues en ne gardant que les 50 premiers modes de variations issus de l’analyse en composantes principales. Image tirée de la publication [19].

5.2 Analyse morphométrique de l’oreille humaine pour l’individualisation des techniques de spatialisation sonore

Ce travail est issu d’une collaboration commencée en 2011 avec l’équipe CARLab (Computing and Audio Research Laboratory) à l’Université de Sydney, sur un projet de recherche en audio. Ce travail a abouti pour le moment à trois articles de conférence [17, 18, 19].

Le contexte applicatif est celui de l’individualisation du son transmis par les casques audio, dans le but d’améliorer la qualité de restitution spatiale. Le point central est d’arriver à établir une caractérisation du lien entre la forme de l’oreille externe (qui filtre le son arrivant au tympan) et les fonctions de transfert HRIR (head-related impulse response) qui modélisent ce filtrage. Dans ce but nous avons tout d’abord utilisé les modèles difféomorphiques d’analyse de forme pour modéliser la variabilité anatomique de l’oreille externe au sein d’une population et extraire des modes principaux de variation. D’un point de vue méthodologique, cette étude a amené à proposer notamment un nouvel algorithme multi-échelles pour l’estimation de prototype [18]. Cet algorithme consiste à combiner la méthode du barycentre itéré (vue comme initialisation) et la méthode d’estimation de prototype (4.2), toute la procédure étant itérée plusieurs fois en diminuant les échelles des noyaux reproduisant les échelles. Plus précisément, chaque procédure à une échelle donnée σ_k fournit une forme prototype T_{σ_k} , puis les formes individuelles sont déformées sur cette forme prototype T_{σ_k} , ce qui fournit une nouvelle population de formes pour l’échelle suivante σ_{k+1} .

L’étape suivante de l’étude correspond à une analyse en composantes principales de la base de formes, analyse effectuée sur les vecteurs moments initiaux correspondant aux déformations entre la forme prototype et les formes de la population. La figure 5.3 montre un résultat de cette analyse morphométrique sur la base de données du projet.

6

Projets en cours et perspectives

Je présente dans ce dernier chapitre très brièvement quelques pistes de recherche pour le futur, certaines étant issues de projets en cours, d'autres étant plus prospectives.

6.1 Utilisation des k -jets pour les modèles difféomorphiques discrets

L'algorithme du tir géodésique présenté au chapitre 1 est adapté à toute formulation discrète des problèmes variationnels continus à condition que cette discrétisation implique d'écrire les termes d'attache comme fonction du déplacement de certains points. Dans le cas du terme d'attache de type courant pour les surfaces par exemple, ceci est justifié par le fait que l'action d'un courant sur une forme géométrique correspond à l'action ensembliste, de sorte qu'il est acceptable de considérer que la forme finale et son approximation dans l'espace des courants sont calculées à partir des déplacements des sommets de la triangulation. Cependant il serait bien plus satisfaisant de travailler directement avec les approximations courants des surfaces et de dériver les conditions d'optimalité pour ce modèle. Ceci nécessite en fait de travailler dans l'espace des k -jets pour les vecteurs moments et d'utiliser les équations géodésiques correspondantes (le modèle de base correspondant au cas des 0-jets). Ces équations ont été dérivées dans l'article [JS14] mais jamais encore appliquées au cas de termes d'attache de type courants, varifolds ou cycles normaux.

6.2 Estimation des paramètres des noyaux vectoriels dans les modèles difféomorphiques

A la suite du post-doctorat de Mario Micheli au MAP5, notre collaboration s'est poursuivie sur la thématique des noyaux vectoriels invariants (cf section 2). En effet l'étude de ces noyaux a permis de montrer qu'ils forment une classe de noyaux assez vaste mais néanmoins facilement paramétrable, tous utilisables dans le cadre du modèle LDDMM. Par conséquent il nous est apparu intéressant de pouvoir décider dans un cadre applicatif donné quels noyaux sont les plus adaptés, ce qui amène donc à explorer les possibilités d'estimation de leurs paramètres. Plusieurs travaux ont abordé ce problème pour les méthodes LDDMM [DPC⁺14, VR14], mais toujours en considérant des noyaux scalaires. Le programme de recherche que nous avons envisagé consiste donc en la mise au point de méthodes d'estimations des paramètres des noyaux vectoriels invariants, et une première piste de recherche a été de s'inspirer de la méthode décrite dans

un article de Fan, Houle et Mio ([FHM10]). La méthode consiste à optimiser sur une base d'apprentissage quelques paramètres décrivant une famille simple de noyaux de type TRI, plus précisément la famille de noyaux construite à partir de deux noyaux gaussiens décrite dans notre article [2]. Des premiers essais ont été effectués et ont fait l'objet d'une présentation lors de la conférence SIAM Imaging Science 2016, mais il reste beaucoup de travail à accomplir pour explorer cette piste.

Une autre piste pour l'apprentissage du noyau serait de chercher une méthode permettant d'apprendre directement les fonctions h^{\parallel} et h^{\perp} . En effet comme on l'a vu au chapitre 2, un noyau est de type TRI dès que ces fonctions sont à valeurs positives, et de ce fait ces deux fonctions paramètrent de manière naturelle tous les noyaux invariants vectoriels. Cependant une telle idée devrait être expérimentée avec précaution, car le fait d'autoriser une très grande souplesse dans la métrique pourrait mener facilement à des problèmes de surapprentissage ; autrement dit lors de l'analyse d'une population de formes toute l'information statistique pourrait disparaître dans la métrique apprise.

6.3 Collaboration avec CARLab : modèles difféomorphiques 3D/4D couplés et noyaux semi-reproduisants

Ma collaboration avec le laboratoire CARLab, commencée depuis plusieurs années, est renforcée à présent par le démarrage du projet intitulé *Individualisation for 3D Audio over Headphones* financé par l'ARC (Australian Research Council), pour la période 2016 à 2019. Trois étudiants en thèse ont déjà été recrutés cette année au laboratoire CARLab, pour mener à bien ce projet, dont un, Xian Long, travaille sur la partie du projet lié aux méthodes difféomorphiques. Il s'agit essentiellement de pouvoir adapter les méthodes difféomorphiques au traitement de données de type fonctions de transfert HRIR, ce qui pose des problèmes théoriques intéressants. En effet ces données peuvent être vues comme des collections de surfaces dans l'espace 4D (3D+fréquence), ce qui nécessite de déterminer un modèle difféomorphique adapté où chaque difféomorphisme correspondant à une fréquence donnée est couplé à ses voisins, ce qui peut être vu aussi comme un unique difféomorphisme 4D contraint à une évolution dans l'espace géométrique.

Il s'agira ensuite de trouver des méthodes pour effectuer une analyse couplée de la variabilité dans l'espace réel anatomique et dans l'espace des fonctions de transfert, le but général du projet étant de pouvoir in fine estimer rapidement une fonction de transfert adaptée à un individu à partir de mesures simples. D'un point de vue mathématique, un des axes de recherche prévu dans le projet concerne l'utilisation de noyaux semi-reproduisants dans les modèles difféomorphiques, ce qui permettrait d'accorder un coût nul à certaines déformations (en premier lieu les déplacements rigides). Ceci permettrait d'éviter des solutions usuelles (adjonction d'un coût faible pour ces déformations ou plus simplement recalage rigide préalable) qui sont peu satisfaisantes et posent des problèmes dans le cadre de l'analyse de population.

6.4 Modèles d'estimation multi-prototypes

La méthode d'estimation multi-prototypes basée sur l'algorithme des k -moyennes, présentée à la section 4.4 a été implémentée et testée avec succès sur des données synthétiques, mais pas sur des données réelles. Plusieurs questions théoriques pourraient être abordées autour de cette idée, notamment ses liens avec d'autres méthodes [ADK15], et une étude applicative beaucoup plus poussée serait nécessaire. D'autre part la méthode du barycentre itéré (cf section 4.3) pourrait sans doute elle aussi être étendue au cas multi-prototypes.

6.5 Espaces de formes et métamorphoses

Il s'agit d'une piste qui a été très brièvement abordée lors d'un stage de master (stage de Master 2 de Juliette Chevallier en 2016), et qui demanderait beaucoup plus de recherches. Le modèle des métamorphoses dans le cadre des méthodes LDDMM [TY05] consiste à intégrer dans la métrique locale de l'espace des formes un terme de variation non explicable par déformations, par exemple un changement d'intensité pour les images, alors que cette variation est habituellement négligée dans les applications usuelles, ou plutôt confondue avec le terme de bruit des observations. Dans le cas où les formes sont modélisées en tant que mesures scalaires, une étude mathématique [RY13b] a montré que le modèle des métamorphoses génère potentiellement des distributions singulières (de type Calderon-Zygmund), ce qui rend le modèle difficilement utilisable pour les algorithmes usuels basés sur le déplacement de points de contrôle. Juliette Chevallier a étudié et implémenté lors de son stage un modèle simplifié (dit de pseudo-métamorphoses) écrit directement dans un cadre discret et donnant donc une métrique riemannienne de dimension finie sur les positions des points. Cependant l'étude numérique s'est limitée à quelques exemples très simples. Il serait très intéressant de poursuivre l'étude de ce modèle, à la fois mathématiquement pour le comparer au modèle complet et pour déterminer s'il peut être utile pour les applications réelles.

6.6 Analyses longitudinales et modèles multi-prototypes de branchements

L'exemple guide pour cette idée est le développement du cerveau humain et la formation des sillons corticaux. L'organisation géométrique et topologique de ces sillons présente une très grande variation inter-individuelle à l'âge adulte, tout en correspondant à l'évolution d'une forme commune ou tout du moins très proche au stade fœtal. Du point de vue de l'analyse morphométrique, il semble de ce fait bien plus cohérent pour ce type de données de considérer directement un modèle longitudinal pour comparer les formes. Autrement dit, même pour l'analyse d'une population de formes adultes, un modèle temporel pourrait être estimé, et pourrait permettre de rendre mieux compte des variations observées que le modèle classique. Ainsi par exemple la comparaison de deux formes S et T se ferait en estimant une évolution temporelle pour chacune des deux formes, correspondant à un modèle géométrique ou bien estimé sur une base d'apprentissage, puis en analysant les différences morphologiques à un âge précoce.

D'autre part les modèles d'analyse de groupe multi-prototype déjà évoqués permettent de modéliser des populations de formes présentant une grande variabilité. Du point de vue de l'analyse longitudinale, il semblerait cohérent dans certaines situations de définir un modèle où les formes prototypes seraient en nombre variable au cours du temps et organisées sous forme d'arbre évolutif. Ainsi pour reprendre l'exemple du cerveau humain, on pourrait imaginer un modèle morphométrique avec forme prototype unique à l'âge foetal, qui ensuite se diviserait progressivement.

Dans cette optique, les modèles de type métamorphose, ou bien tout autre modèle permettant d'inclure des composantes non difféomorphes aux changements de formes observés, comme le transport optimal, pourraient être d'une grande utilité pour modéliser les changements de topologie entre formes prototypes.

6.7 Modèle des cycles normaux

L'étude des modèles de cycles normaux s'avère très prometteuse et très certainement beaucoup de points restent à explorer d'un point de vue théorique, notamment les liens avec les modèles de varifolds. En effet ces deux modèles géométriques différent a priori mais semblent fortement liés si l'on regarde les métriques à noyaux définies sur ces espaces. Il semble qu'en choisissant des noyaux "simples" (constants ou linéaires par exemple) pour la partie k_n du noyau on retrouve le modèle des varifolds, et parallèlement l'utilisation de noyaux plus simples pour les cycles normaux permettrait d'obtenir des algorithmes beaucoup plus rapides. De plus l'extension du modèle aux surfaces est assez complexe, ici aussi l'utilisation de noyaux simplifiés permettrait d'obtenir des algorithmes rapides. Cette dernière piste a d'ailleurs commencé à être explorée et des résultats ont été soumis pour la conférence Geometric Science of Information 2017. Enfin il reste encore beaucoup de travail applicatif à réaliser sur ce modèle, afin de mettre en évidence son utilité sur des problèmes réels. Les données de sillons corticaux utilisées à titre d'exemple dans notre article (voir figure 3.2.3, pourraient être traitées avec ce modèle, avec peut-être la possibilité d'améliorer les méthodes de co-recalage du cerveau, notamment pour la méthode DISCO évoquée dans la partie 5.1.

Bibliographie

- [ADK15] S. Allasonnière, S. Durrleman, and E. Kuhn. Bayesian mixed effect atlas estimation with a diffeomorphic deformation model. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 8(3) :1367–1395, 2015.
- [ADPY12] Marc Arnaudon, Clément Dombry, Anthony Phan, and Le Yang. Stochastic algorithms for computing means of probability measures. *Stochastic Processes and their Applications*, 122(4) :1437–1455, 2012.
- [AEGG08] B.B. Avants, C.L. Epstein, M. Grossman, and J.C. Gee. Symmetric diffeomorphic image registration with cross-correlation : Evaluating automated labeling of elderly and neurodegenerative brain. *Medical Image Analysis*, 12(1) :26 – 41, 2008. Special Issue on The Third International Workshop on Biomedical Image Registration – {WBIR} 2006.
- [Afs11] Bijan Afsari. Riemannian L^p center of mass : Existence, uniqueness, and convexity. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 139(2) :655–673, 2011.
- [AHS17] Alexis Arnaudon, Darryl D. Holm, and Stefan Sommer. A geometric framework for stochastic shape analysis. *CoRR*, abs/1703.09971, 2017.
- [Arn66] Vladimir Arnold. Sur la géométrie différentielle des groupes de lie de dimension infinie et ses applications à l’hydrodynamique des fluides parfaits. *Annales de l’institut Fourier*, 16(1) :319–361, 1966.
- [Aro50a] N Aronszajn. Theory of reproducing kernels. *Transactions of the American Mathematical Society*, 68 :337–404, 1950.
- [Aro50b] Nachman Aronszajn. Theory of reproducing kernels. *Transactions of the American Mathematical Society*, 68(3) :337–404, May 1950.
- [Ash07] John Ashburner. A fast diffeomorphic image registration algorithm. *NeuroImage*, 38(1) :95 – 113, 2007.
- [Att70] Marc Atteia. Fonctions ‘spline’ et noyaux reproduisants d’Aronszajn-Berman. *Rev. Franç. Inform. Rech. Opér.*, 4(R-3) :31–43, 1970.
- [ATTY15] Sylvain Arguillère, Emmanuel Trélat, Alain Trounev, and Laurent Younes. Shape deformation analysis from the optimal control viewpoint. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 104(1) :139 – 178, 2015.
- [ATV13] Bijan Afsari, Roberto Tron, and René Vidal. On the convergence of gradient descent for finding the Riemannian center of mass. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 51(3) :2230–2260, 2013.
- [BBM14] Martin Bauer, Martins Bruveris, and Peter W. Michor. Overview of the geometries of shape spaces and diffeomorphism groups. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 50(1) :60–97, 2014.

- [BJM99] Muge Bakircioglu, Sarang Joshi, and Michael Miller. Landmark matching on brain surfaces via large deformation diffeomorphisms on the sphere. *NeuroImage*, 9(6 PART II), 1999.
- [BMTY05] M. Faisal Beg, Michael I. Miller, Alain Trouvé, and Laurent Younes. Computing large deformation metric mappings via geodesic flows of diffeomorphisms. *Int. Journal on Computer Vision*, 61(2) :139–157, 2005.
- [Boo89] F. L. Bookstein. Principal Warps : Thin-Plate Splines and the Decomposition of Deformations. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(6) :567–585, 1989.
- [Boo97] Fred L. Bookstein. *Morphometric Tools for Landmark Data : Geometry and Biology*. Cambridge, 1997.
- [Bro92] Lisa Gottesfeld Brown. A survey of image registration techniques. *ACM Comput. Surv.*, 24(4) :325–376, December 1992.
- [BRV12] Martins Bruveris, Laurent Risser, and François-Xavier Vialard. Mixture of kernels and iterated semidirect product of diffeomorphisms groups. *Multiscale Modeling & Simulation*, 10(4) :1344–1368, 2012.
- [CDVTU10] Claudio Carmeli, Ernesto De Vito, Alessandro Toigo, and Veronica Umantà. Vector-valued Reproducing Kernel Hilbert Spaces and Universality. *Analysis and Applications*, 08(01) :19, 2010.
- [CMM⁺06] Yan Cao, M. I. Miller, S. Mori, R. L. Winslow, and L. Younes. Diffeomorphic matching of diffusion tensor images. In *2006 Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshop (CVPRW'06)*, pages 67–67, June 2006.
- [CRM96] G.E. Christensen, R.D. Rabbitt, and M.I. Miller. Deformable templates using large deformation kinematics. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 5(10) :1435–1447, 1996.
- [CT13] Nicolas Charon and Alain Trouvé. The varifold representation of nonoriented shapes for diffeomorphic registration. *SIAM J. Imaging Sciences*, 6(4) :2547–2580, 2013.
- [DFBJ07] Brad C. Davis, P. Thomas Fletcher, E. Bullitt, and Sarang Joshi. Population shape regression from random design data. In *Proceedings of the 11th IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV 2007)*, Rio de Janeiro, Brazil, October 2007.
- [DFBJ10] Brad Davis, P. Fletcher, Elizabeth Bullitt, and Sarang Joshi. Population shape regression from random design data. *International Journal of Computer Vision*, 90(2) :255–266, 2010.
- [DGM98] Paul Dupuis, Ulf Grenander, and Michael I. Miller. Variational problems on flows of diffeomorphisms for image matching. *Quarterly of Applied Mathematics*, 56(3) :587–600, September 1998.
- [DM98] Ian L. Dryden and Kanti V. Mardia. *Statistical shape analysis*. Wiley series in probability and statistics. Wiley, Chichester [u.a.], 1998.
- [DPC⁺14] Stanley Durrleman, Marcel Prastawa, Nicolas Charon, Julie R. Korenberg, Sarang Joshi, Guido Gerig, and Alain Trouvé. Morphometry of anatomical shape complexes with dense deformations and sparse parameters. *NeuroImage*, 101 :35 – 49, 2014.
- [DPTA08] Stanley Durrleman, Xavier Pennec, Alain Trouvé, and Nicholas Ayache. A Forward Model to Build Unbiased Atlases from Curves and Surfaces. In Xavier Pennec,

-
- editor, *2nd MICCAI Workshop on Mathematical Foundations of Computational Anatomy*, pages 68–79, New-York, United States, October 2008.
- [DPTA09] Stanley Durrleman, Xavier Pennec, Alain Trouvé, and Nicholas Ayache. Statistical models of sets of curves and surfaces based on currents. *Medical Image Analysis*, 13(5) :793 – 808, 2009. Includes Special Section on the 12th International Conference on Medical Imaging and Computer Assisted Intervention.
- [Duc77] Jean Duchon. Splines minimizing rotation-invariant semi-norms in Sobolev spaces. In Walter Schempp and Karl Zeller, editors, *Constructive Theory of Functions of Several Variables*, number 571 in Lecture Notes in Mathematics, pages 85–100. Springer, January 1977.
- [Dur10] Stanley Durrleman. *Statistical models of currents for measuring the variability of anatomical curves, surfaces and their evolution*. PhD thesis, Université Nice - Sophia Antipolis, 2010.
- [EM91] Michel Emery and Gabriel Mokobodzki. Sur le barycentre d’une probabilité dans une variété. In *Séminaire de probabilités*, volume 25, pages 220–233. Springer Berlin Heidelberg, 1991.
- [Fed59] Herbert Federer. Curvature measures. *Trans. Amer. Maths. Soc.*, 93, 1959.
- [FHM10] Y. Fan, D. Houle, and W. Mio. Learning metrics for shape classification and discrimination. In *2010 20th International Conference on Pattern Recognition*, pages 2652–2655, Aug 2010.
- [FLJ03] P. Thomas Fletcher, Conglin Lu, and Sarang Joshi. Statistics of shape via Principal Geodesic Analysis on Lie groups. In *Proceedings of the 2003 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR 2003)*, volume 1, pages 95–101, Madison, Wisconsin, June 2003.
- [FLPJ04] P. Thomas Fletcher, Conglin Lu, Stephen M. Pizer, and Sarang Joshi. Principal Geodesic Analysis for the Study of Nonlinear Statistics of Shape. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 23(8) :995–1005, August 2004.
- [GDT15] Barbara Gris, Stanley Durrleman, and Alain Trouvé. *A Sub-Riemannian Modular Approach for Diffeomorphic Deformations*, pages 39–47. Springer International Publishing, Cham, 2015.
- [Ger12] Emilie Gerardin. *Morphometry of the human hippocampus from MRI and conventional MRI high field*. PhD thesis, Université Paris Sud, 2012. Thèse de doctorat dirigée par Colliot, Olivier Physique Paris 11 2012.
- [GRD⁺11] D. Geffroy, D. Rivière, I. Denghien, N. Souedet, S. Laguitton, and Y. Cointepas. Brainvisa : a complete software platform for neuroimaging. In *Python in Neuroscience workshop*, Paris, Aug. 2011.
- [GRE93] Ulf GRENANDER. *General pattern theory - A mathematical study of regular structures*. Clarendon Press, Oxford, 1993.
- [GV16] Thomas Gallouët and François-Xavier Vialard. From unbalanced optimal transport to the Camassa-Holm equation. Comments welcome, 28 pages, December 2016.
- [HFJ14] Jacob Hinkle, P Thomas Fletcher, and Sarang Joshi. Intrinsic polynomials for regression on riemannian manifolds. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 50(1-2) :32–52, 2014.

- [HMR98] Darryl D Holm, Jerrold E Marsden, and Tudor S Ratiu. The euler–poincaré equations and semidirect products with applications to continuum theories. *Advances in Mathematics*, 137(1) :1 – 81, 1998.
- [HTY09] DARRYL D. HOLM, ALAIN TROUVÉ, and LAURENT YOUNES. The euler–poincaré theory of metamorphosis. *Quarterly of Applied Mathematics*, 67(4) :661–685, 2009.
- [JM00] Sarang C. Joshi and Michael I. Miller. Landmark matching via large deformation diffeomorphisms. *IEEE Transactions on Image Processing*, 9(8) :1357–1370, August 2000.
- [JS14] Henry O. Jacobs and Stefan Horst Sommer. Higher-order spatial accuracy in diffeomorphic image registration. *Geometry, Imaging and Computing*, 1(4) :447–484, 2014.
- [Kar77] Hermann Karcher. Riemannian center of mass and mollifier smoothing. *Communications on pure and applied mathematics*, 30(5) :509–541, 1977.
- [Ken89] David G. Kendall. A survey of the statistical theory of shape. *Statistical Science*, 4(2) :87–99, 1989.
- [Ken90] Wilfrid S Kendall. Probability, convexity, and harmonic maps with small image I : uniqueness and fine existence. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(2) :371–406, 1990.
- [KLMP13] B. Khesin, J. Lenells, G. Misiolek, and S. C. Preston. Geometry of diffeomorphism groups, complete integrability and geometric statistics. *Geometric and Functional Analysis*, 23(1) :334–366, 2013.
- [Le04] Huiling Le. Estimation of Riemannian barycentres. *LMS J. Comput. Math*, 7 :193–200, 2004.
- [LN89] Dong C. Liu and Jorge Nocedal. On the limited memory BFGS method for large scale optimization. *Mathematical Programming*, 45(1-3) :503–528, August 1989.
- [MHP17] Nina Miolane, Susan Holmes, and Xavier Pennec. Template shape estimation : correcting an asymptotic bias. *SIAM Journal of Imaging Sciences*, 2017.
- [MM06] Peter W. Michor and David B. Mumford. Riemannian geometries on spaces of plane curves. *Journal of the European Mathematical Society*, 8 :1–48, 2006.
- [MM07] Peter W. Michor and David B. Mumford. An overview of the Riemannian metrics on spaces of curves using the Hamiltonian approach. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 23 :74–113, 2007.
- [MM13] Peter W. Michor and David Mumford. A zoo of diffeomorphism groups on \mathbf{r}^n . *Annals of Global Analysis and Geometry*, 44(4) :529–540, 2013.
- [MMTY08] Jun Ma, Michael I. Miller, Alain Trouvé, and Laurent Younes. Bayesian template estimation in computational anatomy. *NeuroImage*, 42(1) :252–261, August 2008.
- [MRSS15] Maas, Jan, Rumpf, Martin, Schönlieb, Carola, and Simon, Stefan. A generalized model for optimal transport of images including dissipation and density modulation. *ESAIM : M2AN*, 49(6) :1745–1769, 2015.
- [MTY02] Michael Miller, Alain Trouve, and Laurent Younes. On the metrics and euler–lagrange equations of computational anatomy. *Annual Review of Biomedical Engineering*, 4(1) :375–405, 2002.

-
- [MTY06] Michael I. Miller, Alain Trouvé, and Laurent Younes. Geodesic shooting for computational anatomy. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 24(2) :209–228, March 2006.
- [MY01] Michael I. Miller and Laurent Younes. Group actions, homeomorphisms, and matching : a general framework. *International Journal of Computer Vision*, 41(1/2) :61–84, 2001.
- [PF15] Xavier Pennec and Pierre Fillard. Statistical Computing on Non-Linear Spaces for Computational Anatomy. In Nikos Paragios, Jim Duncan, and Nicholas Ayache, editors, *Handbook of Biomedical Imaging : Methodologies and Clinical Research*, pages 147–168. Springer, 2015.
- [PRTM09] Matthieu Perrot, Denis Rivière, Alan Tucholka, and Jean-François Mangin. *Joint Bayesian Cortical Sulci Recognition and Spatial Normalization*, pages 176–187. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2009.
- [RGD⁺09] D. Rivière, D. Geffroy, I. Denghien, N. Souedet, and Y. Cointepas. BrainVISA : an extensible software environment for sharing multimodal neuroimaging data and processing tools. In *Proc. 15th HBM*, 2009.
- [RHMS12] L. Risser, M. P. Heinrich, T. Matin, and J. A. Schnabel. Piecewise-diffeomorphic registration of 3d ct/mr pulmonary images with sliding conditions. In *2012 9th IEEE International Symposium on Biomedical Imaging (ISBI)*, pages 1351–1354, May 2012.
- [RMPO⁺02] Denis Rivière, Jean-François Mangin, Dimitri Papadopoulos-Orfanos, Jean-Marc Martinez, Vincent Frouin, and Jean Régis. Automatic recognition of cortical sulci of the human brain using a congregation of neural networks. *Medical Image Analysis*, 6(2) :77 – 92, 2002.
- [RY13a] Casey L. Richardson and Laurent Younes. Computing metamorphoses between discrete measures. *Journal of Geometric Mechanics*, 5(1) :131–150, 2013.
- [RY13b] Casey L Richardson and Laurent Younes. Computing metamorphoses between discrete measures. *Journal of Geometric Mechanics*, 5(1), 2013.
- [RZ01] J. Rataj and M. Zähle. Curvatures and currents for unions of sets with positive reach, ii. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 20(1) :1–21, 2001.
- [Sch64] Laurent Schwartz. Sous-espaces hilbertiens d’espaces vectoriels topologiques et noyaux associés (noyaux reproduisants). *Journal d’Analyse Mathématique*, 13(1) :115–256, 1964.
- [SLNP13] Stefan Sommer, François Lauze, Mads Nielsen, and Xavier Pennec. Sparse multi-scale diffeomorphic registration : The kernel bundle framework. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 46(3) :292–308, 2013.
- [T⁺42] Darcy Wentworth Thompson et al. On growth and form. *On growth and form.*, 1942.
- [Tha08] C. Thale. 50 years sets with positive reach – a survey. *Surveys in Mathematics and its Applications*, 3 :123–165, 2008.
- [Tro95] Alain Trouvé. *Infinite Dimensional Group Action and Pattern Recognition*. Technical report, DMI, École Nationale Supérieure, Paris, France, May 1995.
- [TV12] Alain Trouvé and François-Xavier Vialard. Shape splines and stochastic shape evolutions : a second order point of view. *Quarterly of Applied Mathematics*, 70(2) :219–251, 2012.

- [TY05] Alain Trouvé, Alain and Laurent Younes. Metamorphoses through lie group action. *Foundations of Computational Mathematics*, 5 :173–198, February 2005.
- [VMYT04] Marc Vaillant, Michael I. Miller, Laurent Younes, and Alain Trouvé. Statistics on diffeomorphisms via tangent space representations. *NeuroImage*, 23, Supplement 1(0) :S161–S169, 2004.
- [VPPA09] Tom Vercauteren, Xavier Pennec, Aymeric Perchant, and Nicholas Ayache. Diffeomorphic demons : Efficient non-parametric image registration. *NeuroImage*, 45(1, Supplement 1) :S61 – S72, 2009. Mathematics in Brain Imaging.
- [VR14] François-Xavier Vialard and Laurent Risser. *Spatially-Varying Metric Learning for Diffeomorphic Image Registration : A Variational Framework*, pages 227–234. Springer International Publishing, Cham, 2014.
- [VRRC12] François-Xavier Vialard, Laurent Risser, Daniel Rueckert, and Colin J. Cotter. Diffeomorphic 3d image registration via geodesic shooting using an efficient adjoint calculation. *International Journal of Computer Vision*, 97(2) :229–241, 2012.
- [YGQ11] Xianfeng Yang, Alvina Goh, and Anqi Qiu. *Approximations of the Diffeomorphic Metric and Their Applications in Shape Learning*, pages 257–270. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2011.
- [You98] Laurent Younes. Computable elastic distances between shapes. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 58(2) :565–586, 1998.
- [You10] Laurent Younes. *Shapes and Diffeomorphisms*. Springer, 2010.
- [YSV⁺10] B. T. T. Yeo, M. R. Sabuncu, T. Vercauteren, N. Ayache, B. Fischl, and P. Golland. Spherical demons : Fast diffeomorphic landmark-free surface registration. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 29(3) :650–668, March 2010.
- [Z86] M Zähle. Integral and current representation of Federer’s curvature measure. *Arch. Maths.*, 23 :557–567, 1986.
- [Z87] M Zähle. Curvatures and currents for unions of set with positive reach. *Geometriae Dedicata*, 23 :155–171, 1987.

N.B. Les références numérotées sont listées en page xv