Chapitre 1

Ensembles, applications, dénombrement

1.1 Structure du cours.

On dispose en mathématiques **d'axiomes** : ce sont les règles de base du maniement des objets mathématiques.
On peut alors décider si une **assertion** (= formulation mathématique) est **vraie** ou **fausse**. Une assertion est vraie si elle est conforme aux axiomes.
Exemples :
- $7 + 4 = 11$ est une assertion vraie.
- $\pi > 4$ est une assertion fausse.

Le but du cours est de formuler des assertions vraies qui sont appelées, par ordre d'importance
- **Théorèmes**
- **Propositions**
- **Propriétés**

Les axiomes et règles déduites de ces axiomes permettent de **démontrer** la vérité de ces assertions.
Les nouveaux objets ou qualificatifs sont introduits par des **définitions**.
Exemple de définition : l'entier naturel n est dit pair s'il existe un entier naturel k tel que

$$n = 2k.$$

1.2 Vocabulaire du raisonnement logique

Toute assertion est soit vraie (V), soit fausse (F). Etant données deux assertions P et Q, on **définit** de nouvelles assertions par leur valeurs de vérité selon le tableau suivant

P	V	V	F	F
Q	V	F	V	F
non P	F	F	V	V
P et Q	V	F	F	F
P ou Q	V	V	V	F
$P \Rightarrow Q$	V	F	V	V
$P \iff Q$	V	F	F	V

Proposition : Les assertions $[P \Rightarrow Q]$ et $[(\text{non } P) \text{ ou } Q]$ sont identiques.

Preuve : Il suffit d'écrire les valeurs de vérité

P	V	V	F	F
Q	V	F	V	F
$P \Rightarrow Q$	V	F	V	V
non P	F	F	V	V
(non P) ou Q	V	F	V	V

Proposition : *non* $(\textit{non } P) = P$.

non $(P \textit{ ou } Q) = (\textit{non } P) \textit{ et } (\textit{non } Q)$.

non $(P \textit{ et } Q) = (\textit{non } P) \textit{ ou } (\textit{non } Q)$.

Exemples : "Paul est beau et intelligent" a pour négation "Paul est laid ou il est bête".
"Jean est beau ou intelligent" a pour négation " Jean est laid et est bête".

Proposition :

$$P \text{ et } (Q \text{ ou } R) = (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$$
$$P \text{ ou } (Q \text{ et } R) = (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)$$

Proposition : Les assertions $[P \iff Q]$ et $[(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)]$ sont identiques.

Proposition : Les assertions $[P \Rightarrow Q]$ et $[non\ Q \Rightarrow non\ P]$ sont identiques.

La dernière assertion s'appelle la **contraposée** de $[P \Rightarrow Q]$. Elle est parfois plus facile à démontrer.
Exemple : Montrons que n^2 pair $\Rightarrow n$ pair. Il suffit de montrer que sa contraposée est vraie c'est à dire que

$$n \text{ impair} \Rightarrow n^2 \text{ impair.}$$

Supposons donc que n soit un entier naturel impair. Par définition, il existe un entier naturel k tel que $n = 2k + 1$. Nous avons alors

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Nous avons donc écrit n^2 sous la forme

$$n^2 = 2K + 1$$

avec $K = 2k^2 + 2k$ qui est un entier naturel. Cela montre donc que n^2 est impair.

1.3 Les quantificateurs

A toutes ces notations, il faut encore ajouter deux symboles appelés **quantificateurs** :
- $\forall$: quel que soit.
- $\exists$: il existe.

Exemple : L'assertion

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$$

est fausse tandis que l'assertion

$$\exists n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$$

est vraie.
On peut encore ajouter le symbole $\exists!$ qui signifie "il existe un unique"...

1.4 Ensemble et parties

Définition : Un **ensemble** est une "collection" d'objets qui sont appelés **éléments** de l'ensemble.
Si l'ensemble E contient l'élément x, on note $x \in E$.

Définition : A est une **partie** ou **sous-ensemble** de E si tout élément de A appartient à E, c'est à dire

$$x \in A \Rightarrow x \in E.$$

On note $A \subset E$ ou encore $E \supset A$.
Une partie qui n'a qu'un élément $\{x_0\}$ est appelée **singleton**. Une partie qui a deux éléments est appelée une **paire**.
La partie vide qui ne contient aucun élément est notée $\emptyset$.

Remarque : On a ainsi $x \in A \iff \{x\} \subset A$.

Pour définir un ensemble ou une partie, on peut
- Enumérer tous ses éléments.
- Donner une propriété caractéristique de ses éléments.

Exemple : $\{1, 2, 3, 6\} = \{n \in \mathbb{N};\ \exists k \in \mathbb{N},\ 6 = kn\}$. Cet ensemble a pour parties
- $\emptyset$
- Les singletons $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{6\}$.
- Les paires $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$,...
- Les triplets $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 6\}$, $\{1, 3, 6\}$, $\{2, 3, 6\}$, $\{1, 2, 3, 6\}$.
- L'ensemble E.

Remarque :

$$A = B \iff A \subset B \text{ et } B \subset A.$$

Définition : L'ensemble de toutes les parties de l'ensemble E est noté $\mathcal{P}(E)$. Autrement dit, $A \subset E \iff A \in \mathcal{P}(E)$.

Remarque : $\mathcal{P}\big(\{a,b,c\}\big) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\big\}$.
Les ensembles de nombres utilisés dans les chapitres suivants :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$
ensemble des entiers naturels
$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$
ensemble des entiers relatifs
$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q};\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ q \neq 0\right\}$$
ensemble des nombres rationnels

$\mathbb{R}$ ensemble des nombres réels

$\mathbb{C}$ ensemble des nombres complexes

Ces ensembles sont construits de façon que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

1.5 Opérations sur les parties

Définition : Soient A et B deux parties de E. Nous définissons les parties de E suivantes :

Réunion : $A \cup B = \{x \in E;\ x \in A \textbf{ ou } x \in B\}$.

Intersection : $A \cap B = \{x \in E;\ x \in A \textbf{ et } x \in B\}$.

Complémentaire dans E : (noté également A^c s'il n'y a pas d'ambiguité sur l'ensemble E)

$$\mathcal{C}_E(A) = \{x \in E; x \notin A\}.$$

Différence : $A \setminus B = \{x \in E;\ x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap B^c = \mathcal{C}_A(A \cap B)$

Remarque : On note aussi $\mathcal{C}_E(A) = E \setminus A$.

Exemple :
- $\mathcal{C}_{\mathbb{N}}\{1,2\} = \{0, 3, 4, 5, \ldots\}$
- $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}\{1,2\} =]-\infty, 1[\cup]1, 2[\cup]2, +\infty[$

Définition : Deux parties A et B de E sont **disjointes** si $A \cap B = \emptyset$.
Elles sont **complémentaires** dans E si de plus $A \cup B = E$.

Remarque : A et B sont complémentaires si et seulement si

$$\begin{cases} A \cup B = E \\ A \cap B = \emptyset \end{cases}$$

ou encore si et seulement si

$$E \setminus A = B$$

ou de façon symétrique, si et seulement si

$$E \setminus B = A.$$

Remarque :

$$A \cup B = A \iff B \subset A$$
$$A \cap B = A \iff A \subset B$$

Proposition : Pour A, B, C parties de E,
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ noté $A \cup B \cup C$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ noté $A \cap B \cap C$

Démonstration
Nous allons maintenant considérer des familles de parties d'un ensemble. La notation $(A_i)_{i\in I}$ signifie que l'on considère "autant de parties A_i de E qu'il y a d'éléments i dans I". Par exemple, pour $I = \{1, \dots, n\}$, la famille $(A_i)_{i\in I}$ comprend n parties $A_1, \dots, A_n$.

Définition : Soit une famille de parties $(A_i)_{i\in I}$ d'un ensemble E. Nous définissons

La réunion

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E;\ \exists i \in I,\ x \in A_i\}$$

L'intersection

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E;\ \forall i \in I,\ x \in A_i\}.$$

1.6 Produit cartésien.

Définition : Soient E et F deux ensembles. On définit alors le produit cartésien $E \times F$ par

$$E \times F = \{(a, b);\ a \in E, b \in F\}$$

L'élément (a, b) de $E \times F$ est appelé un couple. Si $E = F$, on note $E^2 = E \times E$.

Remarque : ATTENTION : $\{a, b\} = \{b, a\}$ mais $(a, b) \neq (b, a)$.

Définition : Soit $E_1, \dots, E_p$ des ensembles (avec p entier non nul).

$$E_1 \times \cdots \times E_p = \{(x_1, \dots, x_p); \forall i \in \{1, 2, \dots, p\},\ x_i \in E_i\}.$$

L'élément $(x_1, \dots, x_p)$ de $E_1 \times \cdots \times E_p$ est appelé un p-uplet alors que les éléments x_i des E_i sont appelés les composantes du p-uplet.

1.7 Ordre et négations des quantificateurs.

Dans une assertion comportant plusieurs quantificateurs, leur ordre est primordial. Par exemple

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y > x$$
$$\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y > x$$

Pour obtenir la négation d'une assertion comportant des quantificateurs, on remplace tous les $\forall$ par $\exists$, tous les $\exists$ par $\forall$ et la dernière assertion par sa négation. Ainsi, la négation de

$$\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y > x$$

est

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ y \leq x.$$

1.8 Notion d'application

Définition : Une application $f : E \longrightarrow F$ associe à tout élément x de E un élément noté $f(x)$ dans F, dit image de x par f. On note

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

E est appelé ensemble de départ. F est appelé ensemble d'arrivée.

Définition : Deux applications f et g sont égales si elles ont même ensemble de départ, même ensemble d'arrivée et si

$$\forall x \in E,\ f(x) = g(x).$$

Définition : Si $f : E \longrightarrow F$ et $A \subset E$, la restrictriction de f à A, notée $f_{|A}$, est l'application

$$f_{|A} : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

1.9 Surjectivité

Définition : Si $f : E \longrightarrow F$, $y_0 \in F$, $x_0 \in E$ tels que $f(x_0) = y_0$, on dit que x_0 est un **antécédent** de y_0. On note

$$f(E) = \{f(x),\ x \in E\} = \{y \in F;\ \exists x \in E,\ y = f(x)\}$$

l'ensemble image de E par f, c'est à dire l'ensemble des éléments de F qui ont (au moins) un antécédent par f. Plus généralement, si $A \subset E$, on note

$$f(A) = \{f(x);\ x \in A\}.$$

Remarque : Ces deux notations $f(E)$ et $f(A)$ n'ont de sens que par les définitions précédentes.

Définition : On dit que f est **surjective** si $f(E) = F$ c'est à dire si tout élément de F a (au moins) un antécédent par f dans E.

Exemples :
- L'application
$$g_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & 2n \end{array} \right.$$
n'est pas surjective (1 n'a pas d'antécédent).
- L'application
$$g_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ (n+1)/2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{array} \right.$$
est surjective (un antécédent de k est $2k$ mais ce n'est pas le seul).

1.10 Injectivité.

Définition : On dit que $f : E \longrightarrow F$ est **injective** si tout élément de F a <u>au plus</u> un antécédent (aucun antécédent ou un antécédent) dans E. Autrement dit,

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

ou encore, par contraposée,

$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

Exemples :
- L'application
$$g_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & 2n \end{array} \right.$$
est injective (les entiers pairs ont exactement un antécédent, les entiers impairs n'en ont pas).
- L'application
$$g_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ (n+1)/2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{array} \right.$$
n'est pas injective car $g_2(1) = g_2(2) = 1$.

1.11 Bijectivité.

Définition : On dit que $f : E \longrightarrow F$ est **bijective** si elle est injective et surjective. Autrement dit, si tout élément $y \in F$ a un unique antécédent $x \in E$.
Dans ce cas, l'application $y \longmapsto x$ telle que $f(x) = y$ est appelée application réciproque de f et elle est notée f^{-1}. Nous avons donc

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Remarque : f^{-1} est aussi une bijection et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Exemples :
- Les applications g_1 et g_2 précédentes ne sont pas bijectives.
- L'application
$$g_3 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array} \right.$$
est bijective. Son application réciproque est

$$g_3^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} -\sqrt{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

1.12 Composition.

Définition : Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$. La composée $g \circ f : E \longrightarrow G$ est définie par

$$\forall x \in E, \quad (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big).$$

Attention : on ne peut calculer $g \circ f$ que si l'ensemble d'arrivée de f est égal à l'ensemble de départ de g. Ainsi, quand $g \circ f$ est défini, $f \circ g$ ne l'est pas en général. Même quand $f \circ g$ et $g \circ f$ sont toutes deux définies, on a en général $f \circ g \neq g \circ f$.

Proposition : Soit $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to H$.

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

On notera simplement $h \circ g \circ f$.

1.13 Combinatoire élémentaire.

On fixe deux entiers $n \geq p \geq 1$. On considère $E = \{\varphi(1), \dots, \varphi(n)\}$ un ensemble à n éléments.
On rappelle la notation $p! = 1 \cdot 2 \cdots p$. Par exemple, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$. De plus, par convention, on posera $0! = 1$.

Définition : On appelle **arrangement** à p éléments de E un p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ à composantes distinctes prises dans E.

Proposition : Le nombre d'arrangements possibles à p éléments de E est

$$A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Démonstration

Définition : On appelle permutation de E toute bijection σ de E dans E.

Proposition : Il y a $n!$ permutations de l'ensemble E à n éléments.

Démonstration
Remarque : Une permutation σ de l'ensemble $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ est une façon de réordonner les éléments de E (par rapport à l'ordre donné par la numérotation $e_1, \dots, e_n$).
Exemple : Pour une promotion de 300 étudiants, il y a (en absence d'ex-aequo) 300 ! classements possibles en fin d'année.

Proposition : Si F est un ensemble à n éléments, comme E, alors le nombre de bijections de E dans F est $n!$.

Démonstration

Proposition : Il y a $\binom{n}{p} = \frac{1}{p!} A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$ parties à p éléments dans E.

Démonstration
Remarque : La formule vaut aussi pour $p = 0$: $\binom{n}{0} = 1$ puisqu'il n'y a que la partie vide ayant 0 éléments, et pour $p = n$: $\binom{n}{n} = 1$, ici c'est E en entier.

1.14 Coefficient binômial.

Définition : On notera, pour $n \geq 0$ et $0 \leq p \leq n$,

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

et, par convention, on pose, si $p < 0$ ou si $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$. Ces quantités sont appelées **coefficients binômiaux**.

Proposition : Pour $n \geq 1$ et $p \in \{0, \dots, n\}$,

1. $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$

2. $\begin{pmatrix} \text{n} \\ \text{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{n} \\ \text{n-p} \end{pmatrix}$
3. $p\begin{pmatrix} \text{n} \\ \text{p} \end{pmatrix} = n\begin{pmatrix} \text{n-1} \\ \text{p-1} \end{pmatrix}$

Démonstration
La première propriété permet de calculer les différents coefficients à l'aide du triangle de Pascal :

$n\backslash p$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

1.15 Notations $\sum$ et $\prod$.

Tout ce qui suit est valable pour $A = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit deux entiers $m \leq n$ et $x_m, \ldots, x_n$ des éléments de A. On note

$\displaystyle\sum_{i=m}^{n} x_i$ la somme $x_m + \cdots + x_n$.

$\displaystyle\prod_{i=m}^{n} x_i$ le produit $x_m \times \cdots \times x_n$.

Remarque : i est une variable "muette" qui n'a aucune signification en dehors du symbole $\sum$ ou $\prod$. En particulier, on peut lui substituer n'importe quelle autre variable (non affectée précédemment)

$$\sum_{i=m}^{n} x_i = \sum_{j=m}^{n} x_j = \sum_{k=m}^{n} x_k = \cdots$$

Exemples :

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdots n = n!$$

$$\begin{pmatrix} \text{n} \\ \text{k} \end{pmatrix} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{\displaystyle\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{k} i}.$$

Proposition : Pour $m \leq n$ entiers, $x_m, \ldots, x_n$, $y_m, \ldots, y_n, \lambda \in A$,

$$\sum_{i=m}^{n}(\lambda x_i + y_i) = \lambda \sum_{i=m}^{n} x_i + \sum_{i=m}^{n} y_i$$

$$\prod_{i=m}^{n}(\lambda x_i y_i) = \lambda^{n-m+1}\left(\prod_{i=m}^{n} x_i\right)\left(\prod_{i=m}^{n} y_i\right).$$

Pour tout entier r, la "translation $i = j + r$" donne

$$\sum_{i=m}^{n} x_i = \sum_{j=m-r}^{n-r} x_{j+r}.$$

Le changement d'indice $i = n - k$ donne

$$\sum_{i=m}^{n} x_i = \sum_{k=0}^{n-m} x_{n-k}.$$

1.16 Formule du binôme de Newton.

Proposition : Pour tous $a, b \in A$, et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} \text{n} \\ \text{k} \end{pmatrix} a^k\, b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} \text{n} \\ \text{k} \end{pmatrix} a^{n-k} b^k.$$

Exemples :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

On rappelle le triangle de Pascal :

$n\backslash p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

1.17 Une factorisation.

Proposition : Pour tous $a, b \in A$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k\, b^{n-k-1}\right)$$

que l'on utilisera aussi sous la forme :

$$\frac{a^n - b^n}{a-b} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k\, b^{n-k-1} = b^{n-1} + ab^{n-2} + a^2b^{n-3} + \cdots + a^{n-2}b + a^{n-1}$$

si a est différent de b. Et dans le cas particulier où $a = 1$ et b différent de 1 :

$$\frac{1-b^n}{1-b} = \sum_{k=0}^{n-1} b^{n-k-1} = b^{n-1} + b^{n-2} + b^{n-3} + \cdots + b + 1$$

Démonstration : Il faut partir du membre de droite que l'on développe de la façon suivante

$$(a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-k-1} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}.$$

On effectue alors dans la première somme le changement d'indice $l = k+1$, ce qui donne

$$(a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}\right)$$
$$= \sum_{l=1}^{n} a^l b^{n-l} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}$$

Les indices de sommation étant muets, tous les termes se simplifient deux à deux sauf les termes correspondant à $l = n$ et $k = 0$, ce qui donne le résultat de la proposition. **cqfd**