Partiel n° 4
6 janvier 2005

(a) Pour chaque question du questionnaire à choix multiples, cinq réponses sont proposées : deux réponses sont exactes et trois réponses sont fausses. L'étudiant répondra en cochant, sur la feuille de réponse jointe à l'énoncé, les deux cases des réponses qu'il pense correctes. Les points ne seront accordés que si les deux réponses correctes, et elles seules, ont été cochées. Aucun point ne sera accordé si une seule réponse, même correcte, est cochée. La feuille de réponse ne doit pas être raturée.

Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.

$\boxed{1}$ On se place dans $E = \mathbb{R}^3$.

a) $E_1 = \{(x,y,z) \in E / x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

b) $E_2 = \{(x,y,z) \in E / 2x-3y+z=0\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

c) $E_3 = \{(x,y,z) \in E / x-y=2y-3z=0\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

d) $E_4 = \{(x,y,z) \in E / 2x-3y+z=4\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

e) $E_5 = \{(x,1,2x) \in E / x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

$\boxed{2}$ On considère dans $E = \mathbb{R}^3$ les deux familles de vecteurs suivantes : $\mathcal{S}_1 = \{(1,2,3),(2,3,1),(0,1,2)\}$ et $\mathcal{S}_2 = \{(1,2,3),(2,3,1),(0,1,5),(1,1,1)\}$.

a) La famille $\mathcal{S}_1$ est libre.

b) La famille $\mathcal{S}_2$ est libre.

c) La famille $\mathcal{S}_2$ est de rang 3.

d) La famille $\mathcal{S}_2$ est de rang 4.

e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$

$\boxed{3}$ On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 2 \\ 0 & -x & 3 \\ 3 & -2 & 2-x \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) $det(A) = (3-x).(x^2+2)$.

b) $A + C = \begin{pmatrix} 2-x & 1 & 3 \\ 1 & 1-x & 4 \\ 4 & -1 & 3-x \end{pmatrix}$

c) A est une matrice triangulaire inférieure.

d) $A.C$ existe et est égal à $(3-x)C$.

e) $A.{}^tC$ existe et est égal à $(3-x).{}^tC$.

$\boxed{4}$ On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y + 3z, x - z)$ et les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$. On note 0 la matrice nulle.

a) A est la matrice de f dans la base canonique
b) ${}^tA$ est la matrice de f dans la base canonique
c) $f(1, -2, 1) = f(0, 0, 0)$ et l'endomorphisme f est injectif.
d) $A.X_1 = -X_1$ et $A.X_2 = 2X_2$.
e) $A^3 - 2A^2 - 3A = 0$.

$\boxed{5}$ On considère le système :

$$\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ x - 2y = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \qquad \text{et la matrice } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) A est la matrice associée au système linéaire.
b) ${}^tA$ est la matrice associée au système linéaire.
c) Le système a trois inconnues et 3 équations, il est homogène.
d) $det(A) = 0$.
e) Le système est un système de Cramer.

$\boxed{6}$ On considère les deux bases suivantes de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{E} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \text{ et } \mathcal{B} = \{(2, -1, 3), (1, -3, 0), (1, 2, -1)\}$$

et on pose :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) P_1 est la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{B}$.
b) P_2 est la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{B}$.
c) $det(P_1) = 0$.
d) $P_1.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
e) $P_1.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Problème

Remarque préliminaire : Les questions qui suivent nécessitent une réponse rédigée. Les points ne seront attribués que si les différentes étapes de la démonstration sont correctement et clairement justifiées.

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = exp\left(-x^2\right)$$

$$g(x) = \arcsin\left(1 - exp\left(-x^2\right)\right)$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?

2. Quel est le signe de f ?

3. Calculer la dérivée de f et préciser sur quel ensemble f est dérivable.

4. Montrer que, pour tout x réel, $0 < f(x) \leq 1$.

5. Montrer que le développement limité de f à l'ordre 4 en 0 est $1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4$.

6. Quel est l'ensemble de définition de g ?

7. Quel est le signe de g ?

8. Calculer la dérivée de g et préciser sur quel ensemble g est dérivable.

9. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

10. Montrer que le développement limité de $h(u) = \arcsin(u)$ à l'ordre 3 en 0 est $u + \frac{1}{6}u^3$.

11. Calculer un développement limité à l'ordre 3 de g en 0.

Nom :
Prénom :
n° carte d'étudiant :

Partiel n°4
6 janvier 2005

Réponses au questionnaire

	a	b	c	d	e
1					
2					
3					
4					
5					
6					

(a)