

Mathématiques et Calculs : Partiel 2
7 novembre 2006

L1 : Licence Sciences et Technologies,
mention mathématiques, informatique et applications.

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée : 1 heure.

NB : Pour chaque question du questionnaire à choix multiple, cinq réponses sont proposées, deux réponses sont exactes et trois réponses sont fausses. L'étudiant répondra en cochant, sur la feuille de réponse jointe à l'énoncé, les deux cases des réponses qu'il pense correctes. Les points ne seront accordés que si les deux réponses correctes et elles seules, ont été cochées. Aucun point ne sera accordé si une seule réponse, même correcte, est cochée. La feuille de réponse ne doit pas être raturée.

Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.

Question 1.

Vrai Soient $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$. Il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $a_1 z_0^2 + a_2 z_0 + a_3 = 0$.

Faux $\forall z \in \mathbb{C}, z = -\bar{z}$.

Faux Soient $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$. Il existe $z_0 \in \mathbb{R}$ tel que $a_1 z_0^2 + a_2 z_0 + a_3 = 0$.

Vrai $\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}^*, (\bar{z})^n = \overline{z^n}$.

Faux $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z + z'| < |z| + |z'|$.

Question 2. Considérons l'équation du second degré suivante : $5z^2 + 2z + 4 = 0$ admettant deux solutions z_1 et z_2 .

Faux $z_1 z_2 = 4$

Faux Le module de ces solutions est $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Vrai z_1 et z_2 sont solutions de $5z^6 + 2z^5 + 4z^4 = 0$.

Faux $z_1 = \frac{1}{z_2}$.

Vrai $z_1 + z_2 \in \mathbb{R}$.

Question 3. Considérons le nombre réel $z = \frac{2}{1-i\sqrt{3}}$. Alors

Faux $\arg(z) = \frac{\pi}{6}$

Vrai $z\bar{z}^2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vrai $|z| = 1$.

Faux $\bar{z}^2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Faux $z = 1 + i\sqrt{3}$.

Question 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons les racines n -ièmes du complexe $z = 1 + i\sqrt{3}$.

Faux Si w est l'une de ces racines n -ièmes $2w$ l'est aussi.

Faux Deux de ces racines sont identiques.

Faux Le module de toute racine n -ième de z est égal à $\frac{1}{2n}$.

Vrai L'une de ces racines a pour argument $\frac{\pi}{3n}$.

Vrai Le module de toute racine n -ième de z est égal à $2^{\frac{1}{n}}$.

Question 5. Calcul de limites

Vrai $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+2} - \sqrt{4x-1}} = -\frac{4}{\sqrt{3}}$

Vrai $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2+2\cos(x)}{\sin^2(x)} = 1$

Faux $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{(x-2)\cos(x\pi)} = +\infty$

Faux $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 4} = 2$

Faux $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2|x|}{x}$ vaut 2

Question 6. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Vrai Si, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

Faux Si, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq g(x)$ et g est continue en x_0 alors f est continue en x_0 .

Faux Si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, si de plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$ alors g a une limite finie en $+\infty$.

Vrai Si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{x}{2}\right) = L$.

Faux Si, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) - f(x) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ existe.

Question 7. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} , 2π périodique, non constante.

Vrai Si f est continue sur $[0, 2\pi]$ et telle que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} f(x)$ alors f est continue sur \mathbb{R} .

Faux $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Vrai Si f est continue sur $[0, 2\pi]$, f est bornée sur \mathbb{R} .

Faux f admet une limite finie en $+\infty$.

Faux Si f est strictement croissante sur $[0, 2\pi[$, alors f est continue sur \mathbb{R} .

Question 8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$

Faux Cette limite n'existe pas.

Faux $\forall A > 0, \exists B \in \mathbb{R}, x > B \Rightarrow |\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})| > A$

Vrai Cette limite est égale à $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$.

Faux Cette limite est égale à 2.

Vrai Cette limite vaut 1.

Question 9. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $g(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Faux g n'admet pas de limite en 0.

Faux f est prolongeable par continuité en 0 avec la valeur 0.

Vrai f n'admet pas de limite en 0.

Vrai g est prolongeable par continuité sur \mathbb{R} car $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

Faux g est prolongeable par continuité en 0 avec la valeur 1.

Question 10. Soit $E(x)$ la partie entière de x . Etude de $x \mapsto xE\left(\frac{1}{x}\right)$.

Faux $\lim_{x \rightarrow 0} xE\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas.

Faux $\lim_{x \rightarrow 0} xE\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$.

Faux $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, xE\left(\frac{1}{x}\right) > 0$.

Vrai $\lim_{x \rightarrow 0} xE\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

Vrai $\forall x \in \mathbb{R}, E(x) \leq x < E(x) + 1$.