Université René Descartes - Paris 5
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Mathématiques et Calculs : Partiel n°3
5 Décembre 2006

L1 : Licence sciences et technologies,
mention mathématiques, informatique et applications

Durée 1 heure.

NB : *Pour chaque question du questionnaire à choix multiples, cinq réponses sont proposées : deux réponses sont exactes et trois réponses sont fausses. L'étudiant répondra en cochant, sur la feuille de réponse jointe à l'énoncé, les deux cases des réponses qu'il pense correctes. Les points ne seront accordés que si les deux réponses correctes, et elles seules, ont été cochées. Aucun point ne sera accordé si une seule réponse, même correcte, est cochée. La feuille de réponse ne doit pas être raturée.*

Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.

Remarque : Dans tout le sujet on écrira : $DL(n; x = a)$ pour désigner le développement limité d'ordre n, en $x = a$, d'une fonction $f(x)$. Par exemple : $DL(3; x = 0)$ désigne le développement d'ordre 3 en $x = 0$. $\rho_i(x)$ désignera une fonction telle que $\rho_i(a) = 0$ et $\lim \rho_i(x) = 0$ quand x tend vers a. Si $a = +\infty$, $\lim \rho_i(x) = 0$ quand x tend vers $+\infty$. D'autre part, on peut remplacer les expressions de type $(x-a)^n\rho(x)$ par $o((x-a)^n)$ si on est en un point a et donc en particulier si on est en 0, $x^n\rho(x)$ par $o(x^n)$.

Question 1. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ 2\sin(x) & \text{si} \quad 0 < x \leqslant \pi \\ e^{-x+\pi} - x + \pi - 1 & \text{si} \quad x > \pi \end{cases}$

A : f n'est pas dérivable en 0
B : f n'est pas dérivable en π
C : f est continue sur $\mathbb{R}$
D : f est dérivable sur $\mathbb{R}$
E : la dérivée de f à droite en π existe et vaut -2

Question 2. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
A : Si f est une fonction dérivable sur $[a, b[$ alors $\lim_{x \to a^+} f'(x) = f'(a)$
B : Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction 2 fois dérivable telle que $f'' < 0$. Alors f est une fonction concave.
C : Soit $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'(\frac{1}{2}) = 0$ alors f admet un extrémum local en $\frac{1}{2}$ mais on ne sait pas si c'est un minimum ou un maximum
D : Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall x \in]a, b[, \quad f'(x) \neq 0$. Alors f est strictement croissante ou strictement décroissante.
E : Soit $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ alors $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$

Question 3. On considère la fonction $f : \begin{cases}]1, +\infty[\to]-1, +\infty[\\ x \mapsto x\ln(x) - x \end{cases}$. On admet que f est une fonction continue bijective.
A : f est de classe $\mathcal{C}^\infty$
B : f possède un minimum en 1
C : $f^{-1}(0) = 0$
D : $(f^{-1})'(0) = 1$
E : $f^{-1}(x) = e^x$

Question 4. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

A : la dérivée de $x \mapsto (\tan x)^{\sin x}$ est $x \mapsto \sin x(\tan x)^{\sin x - 1}(1+\tan^2 x)$

B : $x \mapsto x|x|$ n'est pas dérivable en 0

C : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$. f dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$

D : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}-1}{2x} = 1$

E : la dérivée de $x \mapsto \ln(|\ln x|)$ vaut toujours $\frac{1}{x \ln x}$ là où elle est définie

Question 5. On considère la fonction $g : \begin{cases} \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x^3+x-1}{x-1} \end{cases}$.

A : g possède un minimum local en $\frac{3}{2}$

B : g ne possède pas de maximum global.

C : g possède un (au moins) extrémum global.

D : g possède un extrémum local en 0

E : g possède 2 extrémas locaux

Question 6.

A : Le $DL(2; x=1)$ de $\ln(2x+3)$ est $\ln(5) + \frac{2}{5}(x-1) - \frac{2}{25}(x-1)^2 + (x-1)^2\rho_1(x)$.

B : Le $DL(2; x=1)$ de $\ln(2x+3)$ est $\ln(5) - \frac{2}{5}(x-1) + \frac{2}{25}(x-1)^2 + (x-1)^2\rho_2(x)$.

C : Le $DL(2; x=1)$ de $\ln(2x+3)$ est $\ln(5) + \frac{2}{5}(x-1) + \frac{2}{25}(x-1)^2 + (x-1)^2\rho_3(x)$.

D : Le $DL(2; x=0)$ de $\ln(2x+3)$ est $\ln(3) + \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x^2 + x^2\rho_4(x)$.

E : Le $DL(2; x=0)$ de $\ln(1+(2x+2))$ est $(2x+2) - \frac{1}{2}(2x+2)^2 + x^2\rho_5(x)$.

Question 7.

A : Le $DL(2; x=0)$ de $\frac{1}{1+x}$ est $1 + x + x^2 + x^2\rho_1(x)$.

B : Le $DL(2; x=0)$ de $\frac{1}{1+\sin x}$ est $1 - x + x^2 + x^2\rho_2(x)$.

C : Le $DL(3; x=0)$ de $\frac{x}{1+\sin x}$ est $x + x^2 + x^3 + x^3\rho_3(x)$.

D : Le $DL(3; x=0)$ de $\frac{\sin x}{1+\sin x}$ est $x - x^2 + \frac{5}{6}x^3 + x^3\rho_4(x)$.

E : Le $DL(3; x=0)$ de $\frac{\sin x}{1+\sin x}$ est $\sin x - (\sin x)^2 + (\sin x)^3 + (\sin x)^3\rho_5(x)$.

Question 8.

A : Le $DL(2; x=+\infty)$ de $\ln(x \tan \frac{1}{x})$ est $3x^2 + x^2\rho_1(x)$.

B : Le $DL(2; x=+\infty)$ de $\ln(x \tan \frac{1}{x})$ est $\frac{1}{3x^2} + \frac{1}{x^2}\rho_2(x)$.

C : Le $DL(2; x=+\infty)$ de $\ln(x \tan \frac{1}{x})$ est $\frac{1}{3x^2} - \frac{1}{x^2}\rho_3(x)$.

D : Le $DL(3; x=0)$ de $\arctan(x^2)$ est $x - x^3 + x^3\rho_4(x)$.

E : Le $DL(3; x=0)$ de $\arctan(x^2)$ est $x - x^2 + x^3 + x^3\rho_5(x)$.

Question 9. Dans cette question on considère des limites quand x tend vers 0.

A : La limite de $\frac{x\sin x + (e^x-1)^2}{(\sin x)^2}$ est 2.

B : La limite de $\frac{x\sin x + (e^x-1)^2}{(\sin x)^2}$ est $+\infty$.

C : La limite de $\frac{\sqrt{1+x^2}-e^{x^2}}{x^2}$ est $-\frac{1}{2}$.

D : La limite de $\frac{\sqrt{1+x^2}-e^{x^2}}{x^2}$ est $+\infty$.

E : La limite de $\frac{\sqrt{1+x^2}+e^{x^2}}{x^2}$ est $\frac{1}{2}$.

Question 10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + x^2\rho(x)$ en 0.

A : f est forcément dérivable en 0 et $f'(0) = 2$.

B : f est forcément deux fois dérivable en 0 et $f''(0) = 3$.

C : $y = 1 + 2x$ est une asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.

D : $y = 1 + 2x$ est tangente à la courbe représentative de f en 0.

E : La courbe représentative de f en 0 est au dessous de sa tangente en 0.

Nom :

Prénom :

Numéro carte étudiant :

Mathématiques et Calculs : Partiel n°3

Partiel du 5 Décembre 2006 : feuille de réponse

	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					