Mathématiques et Calculs : Partiel n°4
Janvier 2007

L1 : Licence sciences et technologies,
mention mathématiques, informatique et applications

Nombre de pages de l'énoncé : 3. Durée 1 heure 30.

NB : *Pour chaque question du questionnaire à choix multiples, cinq réponses sont proposées : deux réponses sont exactes et trois réponses sont fausses. L'étudiant répondra en cochant, sur la feuille de réponse jointe à l'énoncé, les deux cases des réponses qu'il pense correctes. Les points ne seront accordés que si les deux réponses correctes, et elles seules, ont été cochées. Aucun point ne sera accordé si une seule réponse, même correcte, est cochée. La feuille de réponse ne doit pas être raturée.*

Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.

Question 1.

A) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; e^x e^y = 1\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

B) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y-1 = 2y+3z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

C) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z(x^2+y^2) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

D) $\{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}); f(0) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions numériques continues muni de l'addition des fonctions et de leur multiplication par un réel.

E) $\{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}); f(1) = 1\}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions numériques continues muni de l'addition des fonctions et de leur multiplication par un réel.

Question 2.

A) $((1,0,1),(0,2,2),(3,7,1),(2,4,7))$ est un système libre dans $\mathbb{R}^3$

B) $((1,0,0),(0,1,1),(1,1,1))$ est un système libre dans $\mathbb{R}^3$

C) $((1,0,1),(0,2,2),(3,7,1))$ est un système libre dans $\mathbb{R}^3$

D) $((1,2,1,2,1),(2,1,2,1,2),(1,0,1,1,0))$ est un système libre dans $\mathbb{R}^5$

E) $((1,2,1,2,1),(2,1,2,1,2),(1,0,1,1,0),(0,1,0,0,1)$ est un système libre dans $\mathbb{R}^5$

Question 3. Toutes les applications considérées ci-dessous sont définies de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

A) $(x,y) \to (x^2,y^2)$ est une application linéaire

B) $(x,y) \to (3x-y, x+4y)$ est une application linéaire

C) $(x,y) \to (1, 2x-y, x+z)$ est une application linéaire

D) $(x,y) \to (xy, y)$ est une application linéaire

E) $(x,y) \to (0, 3x-y, x+4y)$ est une application linéaire

Question 4. On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $\vec{v}_1 = (1,2,3)$, $\vec{v}_2 = (3,0,-1)$ et $\vec{v}_3 = (1,8,13)$

A) Le système $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est lié

B) $Vect(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = Vect(\vec{v}_2, \vec{v}_3)$

C) Le système $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

D) $Vect(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+4y-3z = 0\}$

E) Le système $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est libre

Question 5. On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

A) $B.A = C.A$

B) $A.B = A.C$

C) $A^3 = 3A^2 - 2A$

D) $det(A) = 1$

E) A est inversible

Question 6. On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x+3y+2z, 2x-2y, x+y+z)$, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et le système linéaire (S)

$$\begin{cases} x+3y+2z = 1 \\ 2x-2y = 2 \\ x+y+z = 3 \end{cases}$$

A) Le système (S) admet un solution unique et l'application f est bijective.

B) Le système (S) est homogène

C) Le système (S) n'admet pas de solution et l'application f n'est pas surjective

D) $det(A) = 1$

E) A est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Problème

Remarque préliminaire : Les questions qui suivent nécessitent une réponse rédigée. Les points ne seront attribués que si les différentes étapes de la démonstration sont correctement et clairement justifiées.

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x+\sqrt{1+x^2}) && \text{si x} \leq 0 \\ &= \frac{2(x-\ln(1+x))}{x} && \text{si x} > 0 \end{aligned}$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?

2. Montrer que le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\sqrt{1+x^2}$ est $1+\frac{x^2}{2}$.

3. Montrer que le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\ln(1+u)$ est $u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}$.

4. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

5. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\frac{2(x-\ln(1+x))}{x}$.

6. La fonction f est-elle continue en 0 ?

7. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

8. La fonction f est-elle deux fois dérivable en 0 ?

9. Quel est est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

10. Le graphe de f admet-il une asymptote en $+\infty$?

11. Donner un équivalent de $f(x)$ en $-\infty$.

Nom :

Prénom :

Numéro carte étudiant :

Mathématiques et Calculs : Partiel n°4

Partiel du 10 janvier 2007 : feuille de réponse

	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					
5					
6					