

Mathématiques et Calculs : partiel n° 2
Novembre 2007

L1 : Licence sciences et technologies,
mention mathématiques, informatique et applications

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1h30.

NB : L'examen se compose de six questions à choix multiples et un exercice. Pour chaque question du questionnaire à choix multiples, cinq réponses sont proposées : deux réponses sont exactes et trois réponses sont fausses. L'étudiant répondra en cochant, sur la feuille de réponses jointe à l'énoncé, les deux cases de réponses qu'il pense correctes. Les points ne seront accordés que si les deux réponses correctes, et elles seules, ont été cochées. Aucun point ne sera accordé si une seule réponse, même correcte, est cochée. La feuille de réponse ne doit pas être raturée.

Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.

Question 1. Soit arcsin la réciproque de la fonction $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ définie par $f(x) = \sin x$.

- A : Pour tout $x \in [0, 1]$, $\sin(\arcsin x) = x$.
- B : arcsin est continue sur $[-1, 1]$.
- C : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arcsin(\sin x) = x$.
- D : Quand la dérivée de arcsin est définie, elle vaut $\frac{1}{1+x^2}$.
- E : arcsin est dérivable sur $[-1, 1]$.

Question 2.

- A : La dérivée de $xe^{\sqrt{\cos x}}$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est $e^{\sqrt{\cos x}}(1 - \frac{x \sin x}{2\sqrt{\cos x}})$.
- B : La dérivée de $\frac{x}{(x^2+2)^2}$ est $\frac{3x^4-4x^2+4}{(x^2+2)^4}$.
- C : La dérivée de $xe^{\sin x}$ est $e^{\sin x}(1 + x \cos x)$.
- D : La dérivée de $\ln(\tan \frac{x}{2})$ pour $0 < x < \pi$ est $\frac{1+\tan^2 \frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2}}$.
- E : La dérivée de $xe^{\sqrt{\cos x}}$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est $e^{\sqrt{\cos x}}(1 + \frac{x \sin x}{2\sqrt{\cos x}})$.

Question 3. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$

- A : Si f est convexe alors $f(x) = 0$ implique $x \leq \frac{1}{2}$.
- B : Si f est strictement croissante alors f est bijective de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} .
- C : Il existe $x \in]0, 1[$ tel que $f(x) = 0$.
- D : Si f est dérivable alors il existe x tel que $f'(x) = 0$.
- E : Si f est strictement croissante alors il existe un unique $x \in]0, 1[$ tel que $f(x) = 0$.

Question 4.

A : Le développement limité de $\ln(2+x)$ en 0 à l'ordre 2 vaut $\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}$.

B : Le développement limité de $(e^x)^{100} \cos(x)$ en 0 à l'ordre 2 vaut $1 + 100x + \frac{9999}{2}x^2$.

C : Le développement limité de e^{2x+1} en 0 à l'ordre 2 vaut $\frac{5}{2} + 4x + 2x^2$.

D : Le développement limité de $\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$ en 0 à l'ordre 2 vaut $x - \frac{x^2}{2}$.

E : Le développement limité de $\frac{1}{(1-x)^2}$ en 0 à l'ordre 2 vaut $1 + 2x + 4x^2$.

Question 5. On considère la fonction $f(x) = x^2 \cos(\frac{1}{x})$ pour $x \neq 0$.

A : f est prolongeable par continuité en $x = 0$.

B : $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$.

C : On pose $f(0) = 0$; f est alors de classe C^1 sur \mathbb{R} .

D : On pose $f(0) = 0$; f est alors dérivable sur \mathbb{R} .

E : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$.

Question 6.

A : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x^2 + 1} - \frac{\sin x}{x^2 - 1} = 0$.

B : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(e^x - \frac{1}{1-x} \right) = -\frac{1}{2}$.

C : $\frac{x + \sin x}{x^2 + \cos x}$ n'a pas de limite pour $x \rightarrow +\infty$.

D : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left(\frac{2x}{1-x} + \ln(1-2x) \right) = \frac{-1}{3}$.

E : $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{2}{x+1} + \frac{4}{x^2-1} \right) = -1$.

Exercice. On considère la fonction $f(x) = e^{1-x^2}$ définie sur \mathbb{R} .

1. Calculer f' et f'' .

2. Montrer que l'équation $f''(x) = 0$ a deux racines $a, b \in \mathbb{R}$ que l'on précisera (en supposant $a < b$).

3. Préciser si f est concave ou convexe sur chacun des intervalles $] -\infty, a[$, $]a, b[$, et $]b, +\infty[$.

4. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{1-x^2}$ où P_n est un polynôme de degré au plus n .

5. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Prénom :

Numéro de carte d'étudiant :

	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					
5					
6					