Université Paris-Descartes.
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Mathématiques et Calculs : Correction du partiel n^{o}1
Octobre 2007

L1 : Licence sciences et technologies, mention mathématiques, informatique et applications

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1 h30.

NB : *Ce sujet contient six questions à choix multiples et un exercice. Pour chaque question du questionnaire à choix multiples, cinq réponses sont proposées : deux réponses sont exactes et trois réponses sont fausses.*

Question 1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Parmi les propositions suivantes, déterminer les deux qui sont vraies.

Faux Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et majorée, alors elle est convergente.

Faux Si les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent alors (u_n) est convergente.

Vrai Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée et décroissante, alors elle est convergente.

Vrai Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors toute sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Faux $(u_n^2 \to l) \Rightarrow (u_n \to \sqrt{l})$.

Question 2 Soit E, F, G trois parties quelconques d'un ensemble non vide S. E^c désigne le complémentaire de E dans S. Soit P et Q des propositions. Parmi les propositions suivantes, déterminer les deux qui sont vraies.

Vrai $[P \ et\ (P \Longrightarrow Q)] \Longrightarrow Q$.

Vrai $E \cap (F^c \cup G)^c = E \cap F \cap G^c$.

Faux $(E \cap F = E \cap G) \Longrightarrow F = G$.

Faux $E \cap (F \cup G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$.

Faux $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((nonP) \Rightarrow (nonQ))$.

Question 3 Parmi les propositions suivantes, déterminer les deux qui sont vraies.

Faux Les équations : $(3x+5)(2x+1) = 4x^2 - 1$ et $3x+5 = 2x-1$ ont les mÃªmes solutions sur $\mathbb{R}$

Faux L'ensemble des solutions de l'inéquation
$$\frac{x+1}{2x-3} \geq 0$$
est $]-\infty, \frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2}, 4[$

Faux Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, si $0 \leq x \leq 2$ et $-3 \leq y \leq -2$, alors $-4 \leq xy \leq 0$.

Vrai Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x-1| < 3 \Leftrightarrow -2 < x < 4$

Vrai Pour tout réels a, b, x , $0 < a \leq x \leq b \Rightarrow \frac{1}{b} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}$

Question 4 Parmi les propositions suivantes, déterminer les deux qui sont vraies.

Faux $e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Faux $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $(e^{i\alpha})^{-1} = -e^{i\alpha}$

Vrai Tout polynôme de degré supérieur ou égal à un admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Vrai Soit (z_n) une suite complexe. Si les suites $(Re(z_n))$ et $Im(z_n))$ convergent alors (z_n) converge.

Faux Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ sont de la forme : $z = e^{\frac{ik\pi}{n}}$, pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Question 5 Parmi les propositions suivantes, déterminer les deux qui sont vraies.

Faux La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée s'écrit : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R}, : |u_n| \leq M$.

Vrai Soit $A \subset \mathbb{R}$, et $M \in \mathbb{R}$, alors : $M \geq Sup(A) \Rightarrow (\forall x \in A, x \leq M)$.

Faux La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ s'écrit : $\exists m < 0, \forall n \in \mathbb{N} : u_n < m$.

Vrai $[\forall x \in E : x \in F \Longrightarrow x \in G]$ est équivalente à $(F \cap E) \subset G$.

Faux L'ensemble A est borné s'écrit : $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ \exists M \in \mathbb{R},\ m \leq x \leq M$.

Question 6 Parmi les propositions suivantes, déterminer les deux qui sont vraies.

Faux $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2 = \left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)\right)^2 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Faux $\sum_{k=0}^{20} 1 = 20$.

Vrai $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{2.k+1}}{2^k} = \frac{1}{2^n} - 1$.

Faux $lim_{n\to+\infty}(\sum_{k=0}^{n}(-\frac{1}{3})^k) = 0$.

Vrai $\sum_{k=0}^{n}(-2)^k\binom{n}{k} = (-1)^n$.

Exercice Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$\begin{aligned} &u_0 = 4 \\ &u_{n+1} = \sqrt{5u_n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

On constate que pour tout n, u_n est strictement positif (Il n'est pas demandé de démontrer ce résultat.)

1) $u_1 = 2\sqrt{5}$, $u_2 = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5}}\sqrt{5}$, $u_3 = \sqrt{5\sqrt{5}\sqrt{2\sqrt{5}}}$.
2) On veut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 5$, en utilisant un raisonnement par récurrence.

   a) pour $n = 0$: $u_0 = 4 \leq 5$

   b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_n \leq 5 \Rightarrow 5u_n \leq 25$$
$$u_n \leq 5 \Rightarrow \sqrt{5u_n} \leq 5$$
$$u_n \leq 5 \Rightarrow u_{n+1} \leq 5$$

   Alors, d'après l'hypothèse de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 5$
3) Nous avons : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{\frac{5}{u_n}}$. Mais, comme $u_n \leq 5$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$. On conclut que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante car ses termes sont positifs.
4) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée; elle est donc convergente. En plus, sa limite l vérifie $l = \sqrt{5l}$. Cette dernière équation possède deux solutions : 0 et 5. Comme $u_n \geqslant 4$, alors $l = 5$.