# Probabilités discrètes

**Julie Delon**

UNIVERSITÉ
PARIS DESCARTES

# Plan du cours

# Première partie I

## Introduction

Pourquoi a t-on besoin des probabilités ?

# Modéliser l'incertitude

Les PROBABILITÉS permettent de modéliser la distribution des observations et d'en déduire si certaines hypothèses sont valides ou pas.

**Raisonnement statistique classique** :

1. Hypothèse
2. Echantillon (ensemble d'observations empiriques)
3. Test de validité de l'hypothèse, en général en calculant des statistiques descriptives

# Modéliser l'incertitude

Les PROBABILITÉS permettent de modéliser la distribution des observations et d'en déduire si certaines hypothèses sont valides ou pas.

**Raisonnement statistique classique** :

1. Hypothèse : *A la naissance, les bébés anglais pèsent plus lourd que les bébés français.*
2. Echantillon (ensemble d'observations empiriques)
3. Test de validité de l'hypothèse, en général en calculant des statistiques descriptives

# Modéliser l'incertitude

Les PROBABILITÉS permettent de modéliser la distribution des observations et d'en déduire si certaines hypothèses sont valides ou pas.

**Raisonnement statistique classique** :

1. Hypothèse : *A la naissance, les bébés anglais pèsent plus lourd que les bébés français.*
2. Echantillon (ensemble d'observations empiriques) : *Poids d'un ensemble de bébés à la naissance dans chaque pays pendant une période donnée.*
3. Test de validité de l'hypothèse, en général en calculant des statistiques descriptives

# Modéliser l'incertitude

Les PROBABILITÉS permettent de modéliser la distribution des observations et d'en déduire si certaines hypothèses sont valides ou pas.

**Raisonnement statistique classique** :

1. Hypothèse : *A la naissance, les bébés anglais pèsent plus lourd que les bébés français.*
2. Echantillon (ensemble d'observations empiriques) : *Poids d'un ensemble de bébés à la naissance dans chaque pays pendant une période donnée.*
3. Test de validité de l'hypothèse, en général en calculant des statistiques descriptives : $poidsmoyen_{UK} = 3.375kg, \ poidsmoyen_{FR} = 3.132kg$

# Modéliser l'incertitude

Les PROBABILITÉS permettent de modéliser la distribution des observations et d'en déduire si certaines hypothèses sont valides ou pas.

**Raisonnement statistique classique** :

1. Hypothèse : *A la naissance, les bébés anglais pèsent plus lourd que les bébés français.*
2. Echantillon (ensemble d'observations empiriques) : *Poids d'un ensemble de bébés à la naissance dans chaque pays pendant une période donnée.*
3. Test de validité de l'hypothèse, en général en calculant des statistiques descriptives : $poidsmoyen_{UK} = 3.375kg, \ poidsmoyen_{FR} = 3.132kg$

- La différence de 243g entre les poids moyens à la naissance est-elle significative ?
- Peut-on en conclure que l'hypothèse est valide ? Vraisemblable ?
- Quelles sont les chances que cette observation soit due au hasard ?

# Exemple concret : efficacité d'un traitement

G. S. May, D. L. DeMets, L. M. Friedman, C. Furberg, and E. Passamani. The randomized clinical trial : bias in analysis. Circulation, 64 :669–673, 1981.

**Etude sur le traitement Anturane contre l'infractus du myocarde (1978)**

| | traitement | placebo |
|---|---|---|
| patients | 813 | 816 |
| décès | 74 | 89 |
| % mortalité | 9.1 % | 10.9 % |

- Le traitement permet de sauver 2% de patients supplémentaires sur cet échantillon.

# Exemple concret : efficacité d'un traitement

G. S. May, D. L. DeMets, L. M. Friedman, C. Furberg, and E. Passamani. The randomized clinical trial : bias in analysis. Circulation, 64 :669–673, 1981.

**Etude sur le traitement Anturane contre l'infractus du myocarde (1978)**

| | traitement | placebo |
|---|---|---|
| patients | 813 | 816 |
| décès | 74 | 89 |
| % mortalité | 9.1 % | 10.9 % |

- Le traitement permet de sauver 2% de patients supplémentaires sur cet échantillon.
- Peut-on en conclure que le traitement a de l'effet ? Ou ces résultats peuvent-ils être dus au hasard ?

# Exemple concret : efficacité d'un traitement

G. S. May, D. L. DeMets, L. M. Friedman, C. Furberg, and E. Passamani. The randomized clinical trial : bias in analysis. Circulation, 64 :669–673, 1981.

**Etude sur le traitement Anturane contre l'infractus du myocarde (1978)**

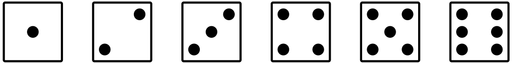
| | traitement | placebo |
|---|---|---|
| patients | 813 | 816 |
| décès | 74 | 89 |
| % mortalité | 9.1 % | 10.9 % |

- Le traitement permet de sauver 2% de patients supplémentaires sur cet échantillon.
- Peut-on en conclure que le traitement a de l'effet ? Ou ces résultats peuvent-ils être dus au hasard ?
- Si l'on avait choisi un autre échantillon de patients ou si les patients avaient été répartis différemment entre le groupe traitement et le groupe placebo, les résultats auraient-ils également été favorables au traitement ?

# Deuxième partie II

## Vocabulaire des probabilités

# Vocabulaire des probabilités



**Exemple d'un lancé de dé**

- Expérience aléatoire : lancé de dé
- Ensemble $\Omega$ des résultats possibles $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Evènements : « le résultat est 2 »$= \{2\}$, « le résultat est pair »$= \{2, 4, 6\}$, etc...

# Expérience aléatoire

**Definition**

Expérience qui, reproduite à l'identique, peut conduire à plusieurs résultats possibles et dont on ne connaît pas le résultat à l'avance.

$\Omega$ (« univers »ou « espace d'états ») $=$ ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience.
$\omega$ (« réalisation ») $=$ résultat possible de l'expérience. On a $\omega \in \Omega$.

# Expérience aléatoire

**Definition**

Expérience qui, reproduite à l'identique, peut conduire à plusieurs résultats possibles et dont on ne connaît pas le résultat à l'avance.

$\Omega$ (« univers »ou « espace d'états ») = ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience.
$\omega$ (« réalisation ») = résultat possible de l'expérience. On a $\omega \in \Omega$.

**Exemples d'expériences aléatoires**

- lancer d'une pièce de monnaie
- 7 lancers successifs d'une pièce de monnaie
- lancer d'un dé à 6 faces
- tirage d'une carte dans un jeu de tarot
- génotype d'un enfant dont les parents ont pour gène soit **A** soit **a**
- score d'un match de foot

# Expérience aléatoire

**Definition**

Expérience qui, reproduite à l'identique, peut conduire à plusieurs résultats possibles et dont on ne connaît pas le résultat à l'avance.

$\Omega$ (« univers »ou « espace d'états ») $=$ ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience.
$\omega$ (« réalisation ») $=$ résultat possible de l'expérience. On a $\omega \in \Omega$.

**Exemples d'expériences aléatoires**

- lancer d'une pièce de monnaie : $\Omega = \{P, F\}$, $|\Omega| = 2$
- 7 lancers successifs d'une pièce de monnaie
- lancer d'un dé à 6 faces
- tirage d'une carte dans un jeu de tarot
- génotype d'un enfant dont les parents ont pour gène soit **A** soit **a**
- score d'un match de foot

# Expérience aléatoire

**Definition**

Expérience qui, reproduite à l'identique, peut conduire à plusieurs résultats possibles et dont on ne connaît pas le résultat à l'avance.

$\Omega$ ($\ll$ univers $\gg$ou $\ll$ espace d'états $\gg$) $=$ ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience.
$\omega$ ($\ll$ réalisation $\gg$) $=$ résultat possible de l'expérience. On a $\omega \in \Omega$.

**Exemples d'expériences aléatoires**

- lancer d'une pièce de monnaie : $\Omega = \{P, F\}$, $|\Omega| = 2$
- 7 lancers successifs d'une pièce de monnaie : $\Omega = \{P, F\}^7$, $|\Omega| = 2^7$
- lancer d'un dé à 6 faces
- tirage d'une carte dans un jeu de tarot
- génotype d'un enfant dont les parents ont pour gène soit **A** soit **a**
- score d'un match de foot

# Expérience aléatoire

**Definition**

Expérience qui, reproduite à l'identique, peut conduire à plusieurs résultats possibles et dont on ne connaît pas le résultat à l'avance.

$\Omega$ (« univers »ou « espace d'états ») $=$ ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience.
$\omega$ (« réalisation ») $=$ résultat possible de l'expérience. On a $\omega \in \Omega$.

**Exemples d'expériences aléatoires**

- lancer d'une pièce de monnaie : $\Omega = \{P, F\}$, $|\Omega| = 2$
- 7 lancers successifs d'une pièce de monnaie : $\Omega = \{P, F\}^7$, $|\Omega| = 2^7$
- lancer d'un dé à 6 faces : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $|\Omega| = 6$
- tirage d'une carte dans un jeu de tarot
- génotype d'un enfant dont les parents ont pour gène soit **A** soit **a**
- score d'un match de foot

# Expérience aléatoire

## Definition

Expérience qui, reproduite à l'identique, peut conduire à plusieurs résultats possibles et dont on ne connaît pas le résultat à l'avance.

$\Omega$ (« univers »ou « espace d'états ») $=$ ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience.
$\omega$ (« réalisation ») $=$ résultat possible de l'expérience. On a $\omega \in \Omega$.

**Exemples d'expériences aléatoires**

- lancer d'une pièce de monnaie : $\Omega = \{P, F\}$, $|\Omega| = 2$
- 7 lancers successifs d'une pièce de monnaie : $\Omega = \{P, F\}^7$, $|\Omega| = 2^7$
- lancer d'un dé à 6 faces : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $|\Omega| = 6$
- tirage d'une carte dans un jeu de tarot : $\Omega = \{1, \ldots, 78\}$, $|\Omega| = 78$
- génotype d'un enfant dont les parents ont pour gène soit **A** soit **a**
- score d'un match de foot

# Expérience aléatoire

**Definition**

Expérience qui, reproduite à l'identique, peut conduire à plusieurs résultats possibles et dont on ne connaît pas le résultat à l'avance.

$\Omega$ (« univers »ou « espace d'états ») $=$ ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience.
$\omega$ (« réalisation ») $=$ résultat possible de l'expérience. On a $\omega \in \Omega$.

**Exemples d'expériences aléatoires**

- lancer d'une pièce de monnaie : $\Omega = \{P, F\}$, $|\Omega| = 2$
- 7 lancers successifs d'une pièce de monnaie : $\Omega = \{P, F\}^7$, $|\Omega| = 2^7$
- lancer d'un dé à 6 faces : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $|\Omega| = 6$
- tirage d'une carte dans un jeu de tarot : $\Omega = \{1, \dots, 78\}$, $|\Omega| = 78$
- génotype d'un enfant dont les parents ont pour gène soit **A** soit **a** : $\Omega = \{(a, a), (a, A), (A, a), (A, A)\}$ et $|\Omega| = 4$
- score d'un match de foot

# Expérience aléatoire

## Definition

Expérience qui, reproduite à l'identique, peut conduire à plusieurs résultats possibles et dont on ne connaît pas le résultat à l'avance.

$\Omega$ (« univers »ou « espace d'états ») $=$ ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience.
$\omega$ (« réalisation ») $=$ résultat possible de l'expérience. On a $\omega \in \Omega$.

**Exemples d'expériences aléatoires**

- lancer d'une pièce de monnaie : $\Omega = \{P, F\}$, $|\Omega| = 2$
- 7 lancers successifs d'une pièce de monnaie : $\Omega = \{P, F\}^7$, $|\Omega| = 2^7$
- lancer d'un dé à 6 faces : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $|\Omega| = 6$
- tirage d'une carte dans un jeu de tarot : $\Omega = \{1, \ldots, 78\}$, $|\Omega| = 78$
- génotype d'un enfant dont les parents ont pour gène soit **A** soit **a** : $\Omega = \{(a, a), (a, A), (A, a), (A, A)\}$ et $|\Omega| = 4$
- score d'un match de foot : $\Omega = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$

# Evènement

**Definition**

Un évènement est un ensemble d'éventualités dont on peut dire au vu de l'expérience s'il est réalisé ou non. Il est représenté par un **sous-ensemble** de $\Omega$.

**Exemples d'évènements**

- **DÉ** le résultat est un nombre impair $= \{1, 3, 5\}$ ⚀ ⚂ ⚄

# Evènement

**Definition**

Un évènement est un ensemble d'éventualités dont on peut dire au vu de l'expérience s'il est réalisé ou non. Il est représenté par un **sous-ensemble** de $\Omega$.

**Exemples d'évènements**

- **DÉ** le résultat est un nombre impair $= \{1, 3, 5\}$ ⚀ ⚂ ⚄
- **GENOTYPE** le génotype de l'enfant ne contient pas l'allèle a $= \{(A, A)\}$

# Evènement

**Definition**

Un évènement est un ensemble d'éventualités dont on peut dire au vu de l'expérience s'il est réalisé ou non. Il est représenté par un **sous-ensemble** de $\Omega$.

**Exemples d'évènements**

- **DÉ** le résultat est un nombre impair $= \{1, 3, 5\}$ 
- **GENOTYPE** le génotype de l'enfant ne contient pas l'allèle a $= \{(A, A)\}$
- **FOOT** la première équipe gagne $= \{(m, n) | m \geq n\}$

# Vocabulaire ensembliste vs probabiliste

Les évènements sont des sous-ensembles de $\Omega$. La collection $\mathcal{E}$ des évènements est une sous-collection de l'ensemble des ensembles de $\Omega$.

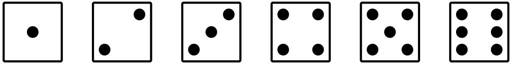
| JARGON ENSEMBLISTE | JARGON PROBABILISTE | NOTATION |
|---|---|---|
| Tout l'espace | évènement certain | $\Omega$ |
| Ensemble vide | Faux (évènement impossible) | $\emptyset$ |
| Intersection de A et B | Conjonction (A et B sont réalisés) | $A \cap B$ |
| Union de A et B | Disjonction (A ou B est réalisé) | $A \cup B$ |
| Complémentaire de A | Négation (non A) | $\Omega \setminus A = A^c$ |
| A et B sont **disjoints** | A et B sont **incompatibles** | $A \cap B = \emptyset$ |
| A est inclus dans B | A implique B | $A \subset B$ |

# Probabilité

La **Probabilité** d'un évènement est un nombre entre 0 et 1 représentant la *vraisemblance* de cet évènement.

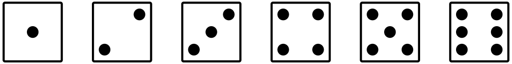
**Intuition** : Si on peut répéter une expérience un très grand nombre de fois, la fréquence avec laquelle l'évènement A se produit tend vers une limite $\mathbb{P}(A)$ lorsque le nombre de répétition tend vers l'infini. Cette limite est appelée probabilité de l'évènement A.

# Exemple : cas du lancé de dé équilibré (c-à-d. non pipé)



- $\mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}(\{2\}) = \mathbb{P}(\{3\}) = \mathbb{P}(\{4\}) = \mathbb{P}(\{5\}) = \mathbb{P}(\{6\}) =$
- $\mathbb{P}(\{pair\}) = \mathbb{P}(\{2,4,6\}) =$
- **Intersection d'évènements** :
  $\mathbb{P}(\ll$ résultat pair et $\geq 4 \gg) = \mathbb{P}(\{2,4,6\} \cap \{4,5,6\}) = \mathbb{P}(\{4,6\}) =$
- **Union d'évènements** :
  $\mathbb{P}(\ll$ résultat pair ou $\geq 4 \gg) = \mathbb{P}(\{2,4,6\} \cup \{4,5,6\}) = \mathbb{P}(\{2,4,5,6\}) =$
- **Complémentaire d'évènement** :
  $\mathbb{P}(\ll$ résultat $< 5 \gg) = \mathbb{P}(\{5,6\}^c) = \mathbb{P}(\{1,2,3,4\}) =$ .

# Exemple : cas du lancé de dé équilibré (c-à-d. non pipé)



- $\mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}(\{2\}) = \mathbb{P}(\{3\}) = \mathbb{P}(\{4\}) = \mathbb{P}(\{5\}) = \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{6}$
- $\mathbb{P}(\{pair\}) = \mathbb{P}(\{2, 4, 6\}) = \frac{1}{2}$
- **Intersection d'évènements** :
  $\mathbb{P}(\ll \text{résultat pair et} \geq 4 \gg) = \mathbb{P}(\{2, 4, 6\} \cap \{4, 5, 6\}) = \mathbb{P}(\{4, 6\}) = \frac{1}{3}$
- **Union d'évènements** :
  $\mathbb{P}(\ll \text{résultat pair ou} \geq 4 \gg) = \mathbb{P}(\{2, 4, 6\} \cup \{4, 5, 6\}) = \mathbb{P}(\{2, 4, 5, 6\}) = \frac{2}{3}$
- **Complémentaire d'évènement** :
  $\mathbb{P}(\ll \text{résultat} < 5 \gg) = \mathbb{P}(\{5, 6\}^c) = \mathbb{P}(\{1, 2, 3, 4\}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

# Probabilité : définition formelle

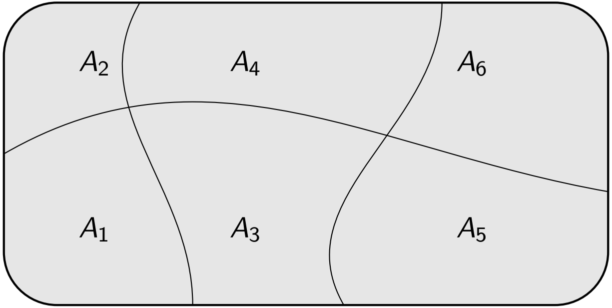
**Definition**

Une mesure de probabilité est une fonction $\mathbb{P} : \mathcal{E} \to [0, 1]$ qui vérifie

i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

ii) Si $(A_i)_i$ est une famille d'évènements incompatibles, alors $\mathbb{P}(\cup_i A_i) = \sum_i \mathbb{P}(A_i)$.

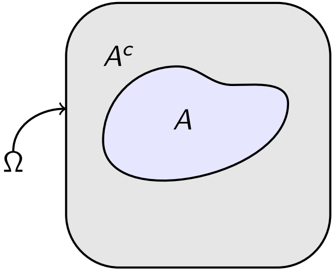
Les évènements sont **incompatibles** si au plus un évènement peut arriver simultanément. L'axiome ii) nous dit que pour calculer la probabilité de l'union d'évènements incompatibles ($=$ ensemble disjoints), il suffit d'additionner leurs probabilités.



# Propriétés d'une mesure de probabilité

## Proposition

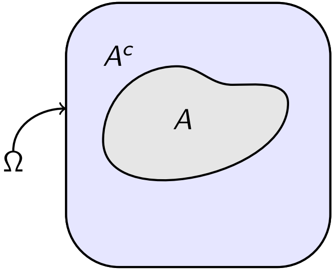
$$\mathbb{P}(A^c) =$$



# Propriétés d'une mesure de probabilité

## Proposition

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) \quad (\text{donc} \quad P(\emptyset) = 0)$$

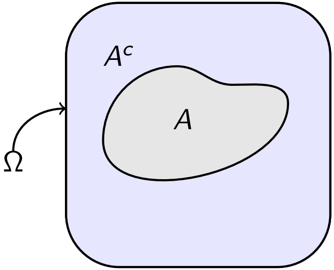


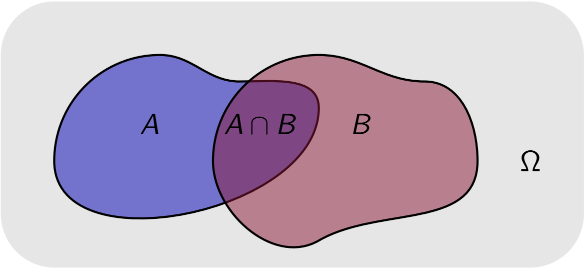
# Propriétés d'une mesure de probabilité

## Proposition

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) \quad (\text{donc} \quad P(\emptyset) = 0)$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) =$$



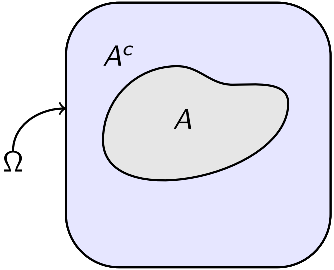



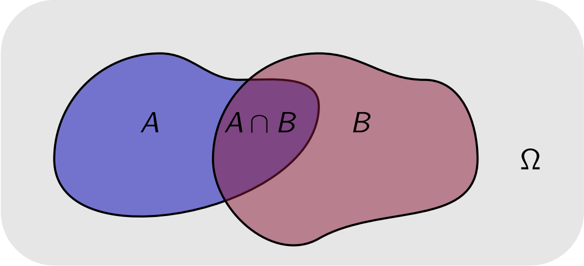
# Propriétés d'une mesure de probabilité

**Proposition**

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) \quad (\text{donc} \quad P(\emptyset) = 0)$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$




**Exercice** : Si $\mathbb{P}(A) = 0.7$, $\mathbb{P}(B) = 0.8$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.6$, que vaut $\mathbb{P}(A \cup B)$ ?

# Evènements simples

**Hypothèses** :

- expérience à nombre fini $N$ de résultats possibles **incompatibles** entre eux $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$.
- évènements **équiprobables**, i.e. :

$$\forall i, j; \quad P(\{\omega_i\}) = P(\{\omega_j\})$$

Alors

$$P(\Omega) = 1 = \sum_{j=1}^{N} P(\{\omega_j\}) = \sum_{j=1}^{N} p = Np$$

Donc $p = 1/N$, pour N évènements équiprobables.
Si $A = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$,

$$P(A) = k/N$$

PROBABILITÉS SIMPLES = DÉNOMBREMENT.

# Troisième partie III

## Dénombrement

# Multiplication

**Principe**

Si $E_1$ (respectivement $E_2$) est une expérience aléatoire qui a $n_1$ (respectivement $n_2$) résultats possibles, alors l'expérience aléatoire $E_1E_2$ qui consiste à faire d'abord $E_1$ puis $E_2$ a $n_1n_2$ résultats possibles.

- Lancer deux pièces donne une expérience à 4 résultats possibles
- Si on tire une boule dans une urne à n boules, et qu'on lance une pièce par ailleurs, alors notre expérience a $2n$ résultats possibles.
- ...

# Arrangements avec remise

**Definition**

Si on a une collection de r objets différents et qu'on les arrange $n$ fois en s'autorisant a prendre plusieurs fois le même objet (tirage avec replacement ou tirage avec remise), on obtient $r^n$ arrangements possibles.

Un digicode a 2 lettres possibles (A et B) et 10 chiffres possibles (0,1,2,. . .,9), ceci donne $(10+2)^4 = 12^4 = 20736$ codes à 4 chiffres/lettres possibles.

# Arrangements avec remise

**Definition**

Si on a une collection de r objets différents et qu'on les arrange $n$ fois en s'autorisant a prendre plusieurs fois le même objet (tirage avec replacement ou tirage avec remise), on obtient $r^n$ arrangements possibles.

Un digicode a 2 lettres possibles (A et B) et 10 chiffres possibles (0,1,2,...,9), ceci donne $(10+2)^4 = 12^4 = 20736$ codes à 4 chiffres/lettres possibles.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12 | | | |

# Arrangements avec remise

## Definition

Si on a une collection de r objets différents et qu'on les arrange $n$ fois en s'autorisant a prendre plusieurs fois le même objet (tirage avec replacement ou tirage avec remise), on obtient $r^n$ arrangements possibles.

Un digicode a 2 lettres possibles (A et B) et 10 chiffres possibles (0,1,2,...,9), ceci donne $(10+2)^4 = 12^4 = 20736$ codes à 4 chiffres/lettres possibles.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12 | 12 | | |

# Arrangements avec remise

**Definition**

Si on a une collection de r objets différents et qu'on les arrange $n$ fois en s'autorisant a prendre plusieurs fois le même objet (tirage avec replacement ou tirage avec remise), on obtient $r^n$ arrangements possibles.

Un digicode a 2 lettres possibles (A et B) et 10 chiffres possibles (0,1,2,. . .,9), ceci donne $(10+2)^4 = 12^4 = 20736$ codes à 4 chiffres/lettres possibles.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12 | 12 | 12 | |

# Arrangements avec remise

**Definition**

Si on a une collection de r objets différents et qu'on les arrange $n$ fois en s'autorisant a prendre plusieurs fois le même objet (tirage avec replacement ou tirage avec remise), on obtient $r^n$ arrangements possibles.

Un digicode a 2 lettres possibles (A et B) et 10 chiffres possibles (0,1,2,. . .,9), ceci donne $(10+2)^4 = 12^4 = 20736$ codes à 4 chiffres/lettres possibles.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12 | 12 | 12 | 12 |

# Permutations

**Exercice** : On cherche à savoir le digicode d'un ami. On se souvient des 4 chiffres (distincts) dont il se compose, mais dont on en a oublié l'ordre, combien de combinaisons devons nous essayer au maximum ?

# Permutations

**Exercice** : On cherche à savoir le digicode d'un ami. On se souvient des 4 chiffres (distincts) dont il se compose, mais dont on en a oublié l'ordre, combien de combinaisons devons nous essayer au maximum ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | | | |

# Permutations

**Exercice** : On cherche à savoir le digicode d'un ami. On se souvient des 4 chiffres (distincts) dont il se compose, mais dont on en a oublié l'ordre, combien de combinaisons devons nous essayer au maximum ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 3 | | |

# Permutations

**Exercice** : On cherche à savoir le digicode d'un ami. On se souvient des 4 chiffres (distincts) dont il se compose, mais dont on en a oublié l'ordre, combien de combinaisons devons nous essayer au maximum ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 2 | |

# Permutations

**Exercice** : On cherche à savoir le digicode d'un ami. On se souvient des 4 chiffres (distincts) dont il se compose, mais dont on en a oublié l'ordre, combien de combinaisons devons nous essayer au maximum ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 2 | 1 |

On a $4 * 3 * 2 * 1 = 24$ possibilités !

# Permutations

**Exercice** : On cherche à savoir le digicode d'un ami. On se souvient des 4 chiffres (distincts) dont il se compose, mais dont on en a oublié l'ordre, combien de combinaisons devons nous essayer au maximum ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 2 | 1 |

On a $4 * 3 * 2 * 1 = 24$ possibilités !

## Definition

Si on a une collection de n objets, il y a exactement $n!$ facon de les ordonner sans replacement.

NB : $n!$ se lit factorielle de n et on a $n! = n * (n-1) * ... * 3 * 2 * 1$.

# Permutations

**Exercice** : On cherche à savoir le digicode d'un ami. On se souvient des 4 chiffres (distincts) dont il se compose, mais dont on en a oublié l'ordre, combien de combinaisons devons nous essayer au maximum ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 2 | 1 |

On a $4 * 3 * 2 * 1 = 24$ possibilités !

## Definition

Si on a une collection de n objets, il y a exactement $n!$ facon de les ordonner sans replacement.

NB : $n!$ se lit factorielle de n et on a $n! = n * (n-1) * ... * 3 * 2 * 1$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| n | | | | |

# Permutations

**Exercice** : On cherche à savoir le digicode d'un ami. On se souvient des 4 chiffres (distincts) dont il se compose, mais dont on en a oublié l'ordre, combien de combinaisons devons nous essayer au maximum ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 2 | 1 |

On a $4 * 3 * 2 * 1 = 24$ possibilités !

## Definition

Si on a une collection de n objets, il y a exactement $n!$ facon de les ordonner sans replacement.

NB : $n!$ se lit factorielle de n et on a $n! = n * (n-1) * ... * 3 * 2 * 1$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| n | n-1 | | | |

# Permutations

**Exercice** : On cherche à savoir le digicode d'un ami. On se souvient des 4 chiffres (distincts) dont il se compose, mais dont on en a oublié l'ordre, combien de combinaisons devons nous essayer au maximum ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 2 | 1 |

On a $4 * 3 * 2 * 1 = 24$ possibilités !

## Definition

Si on a une collection de n objets, il y a exactement $n!$ facon de les ordonner sans replacement.

NB : $n!$ se lit factorielle de n et on a $n! = n * (n-1) * ... * 3 * 2 * 1$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| n | n-1 | . . . | | |

# Permutations

**Exercice** : On cherche à savoir le digicode d'un ami. On se souvient des 4 chiffres (distincts) dont il se compose, mais dont on en a oublié l'ordre, combien de combinaisons devons nous essayer au maximum ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 2 | 1 |

On a $4 * 3 * 2 * 1 = 24$ possibilités !

## Definition

Si on a une collection de n objets, il y a exactement $n!$ facon de les ordonner sans replacement.

NB : $n!$ se lit factorielle de n et on a $n! = n * (n-1) * ... * 3 * 2 * 1$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| n | n-1 | ... | 2 | 1 |

# Arrangements

**Exercice** : On a 12 chevaux en course. Quel est le nombre de tiercés possibles pour le podium ?

# Arrangements

**Exercice** : On a 12 chevaux en course. Quel est le nombre de tiercés possibles pour le podium ?

On essaye d'ordonner des groupes de p éléments. Ce sont les arrangements de p éléments parmi n éléments. Il y a $n*(n-1)\dots(n-p+1)$ façons de le faire.

**Definition**

Il y a $A_n^p$ arrangements de p éléments parmi n éléments, où

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n*(n-1)*\cdots*(n-p+1)$$

# Combinaisons

**Exercice** : On joue à un jeu de cartes à 5 cartes (le poker par exemple). Quel est le nombre de jeux (mains) différents qu'il est possible d'obtenir en distribuant 5 des 52 cartes ?

# Combinaisons

**Exercice** : On joue à un jeu de cartes à 5 cartes (le poker par exemple). Quel est le nombre de jeux (mains) différents qu'il est possible d'obtenir en distribuant 5 des 52 cartes ?

On ne tient pas compte de l'ordre des éléments (tirages simultanés).
Nombre de façons de choisir $p$ éléments parmi une collection de $n$ éléments ?

## Definition

Il y a $C_n^p$ facons de choisir p élémentss parmi n éléments, que l'on appelle des combinaisons, où :

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

# Exercice : Anniversaires dans une classe

**Exercice** : Faut-il s'étonner que 2 étudiants d'une classe de 30 élèves aient le même anniversaire ?

**Hypothèse** : les anniversaires uniformément distribués sur les 365 jours de l'année.

# Exercice : Anniversaires dans une classe

**Exercice** : Faut-il s'étonner que 2 étudiants d'une classe de 30 élèves aient le même anniversaire ?

**Hypothèse** : les anniversaires uniformément distribués sur les 365 jours de l'année.

$$\mathbb{P}(\text{"deux étudiants ont le même anniversaire"})$$

# Exercice : Anniversaires dans une classe

**Exercice** : Faut-il s'étonner que 2 étudiants d'une classe de 30 élèves aient le même anniversaire ?

**Hypothèse** : les anniversaires uniformément distribués sur les 365 jours de l'année.

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\text{''deux étudiants ont le même anniversaire''}) \\
&= 1 - \mathbb{P}(\text{''tous les étudiants ont des anniversaires différents''})
\end{aligned}
$$

# Exercice : Anniversaires dans une classe

**Exercice** : Faut-il s'étonner que 2 étudiants d'une classe de 30 élèves aient le même anniversaire ?

**Hypothèse** : les anniversaires uniformément distribués sur les 365 jours de l'année.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\text{"deux étudiants ont le même anniversaire"}) \\
&= 1 - \mathbb{P}(\text{"tous les étudiants ont des anniversaires différents"}) \\
&= 1 - \frac{365 \times 364 \ldots 336}{365^{30}} \simeq 0.706
\end{aligned}$$

$\rightarrow$ pas surprenant d'avoir deux anniversaires simultanés.

# Quatrième partie IV

## Conditionnement et indépendance

# Test ADN

**Un crime est commis**. La police identifie que l'ADN du coupable contient 12 SNP (Single nucleotide polymorphisms) bien précis et assez rares dans la population. Supposons que chacun de ces SNP est présent sous cette forme rare chez seulement 10% des gens. Un expert peu rigoureux pourrait affirmer que la probabilité qu'une personne présente simultanément ces 12 SNP rares est de

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{12}$$

Sur une population de 60 millions, la probabilité qu'une deuxième personne dans la population présente les mêmes SNP serait donc de $\frac{60.10^6}{10^{12}} \simeq 0.00006$ ce qui conduit l'expert à conclure qu'une personne présentant ces SNP est forcément le coupable.

# Test ADN

**Un crime est commis**. La police identifie que l'ADN du coupable contient 12 SNP (Single nucleotide polymorphisms) bien précis et assez rares dans la population. Supposons que chacun de ces SNP est présent sous cette forme rare chez seulement 10% des gens. Un expert peu rigoureux pourrait affirmer que la probabilité qu'une personne présente simultanément ces 12 SNP rares est de

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{12}$$

Sur une population de 60 millions, la probabilité qu'une deuxième personne dans la population présente les mêmes SNP serait donc de $\frac{60.10^6}{10^{12}} \simeq 0.00006$ ce qui conduit l'expert à conclure qu'une personne présentant ces SNP est forcément le coupable.

Ce raisonnement est-il correct ?

# Test ADN

NON ! ! !

Avoir des versions particulières de chacun de ces SNP ne sont pas focément des évènements indépendants ! ! ! Les 10% de la population qui présente le premier SNP sont peut-être les mêmes qui présente le deuxième, etc.

Par ailleurs, le suspect a peut-être un jumeau...

# Indépendance

**Definition**

Deux évènements A et B sont dits indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

⚠ NE PAS CONFONDRE INDÉPENDANCE ET INCOMPATIBILITÉ ⚠

# Indépendance

## Definition

Deux évènements A et B sont dits indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

⚠ NE PAS CONFONDRE INDÉPENDANCE ET INCOMPATIBILITÉ ⚠

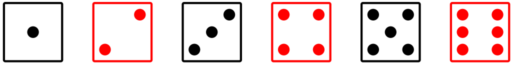
**Lancé d'un dé**

- Les évènements $A =$ « le résultat pair »et $B =$ « le résultat est supérieur ou égal à 5 »sont indépendants, car

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

- Les évènements $A =$ « le résultat pair »et $C =$ « le résultat est supérieur ou égal à 4 »ne sont pas indépendants car

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(\{4, 6\}) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$



# Indépendance mutuelle

**Definition**

Soient $A, B, C$ des évènements. Ils sont dits mutuellement indépendants s'ils sont deux à deux indépendants (c'es-à-dire que $A$ et $B$ sont indépendants, $A$ et $C$ sont indépendants, et $B$ et $C$ sont indépendants) et que $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$.

⚠ NE PAS CONFONDRE INDÉPENDANCE DEUX à DEUX ET INDÉPENDANCE MUTUELLE ⚠

On considère l'ensemble des familles de 2 enfants en admettant que les naissances sont indépendantes et qu'à chaque naissance, la probabilité d'avoir une fille (resp. un garçon) est $1/2$. Soient les événements $A =$"Le premier enfant est une fille", $B =$"Le second enfant est une fille", et $C =$"la famille a des enfants des deux sexes". Les événements $A$, $B$ et $C$ sont indépendants deux-à-deux mais pas mutuellement.

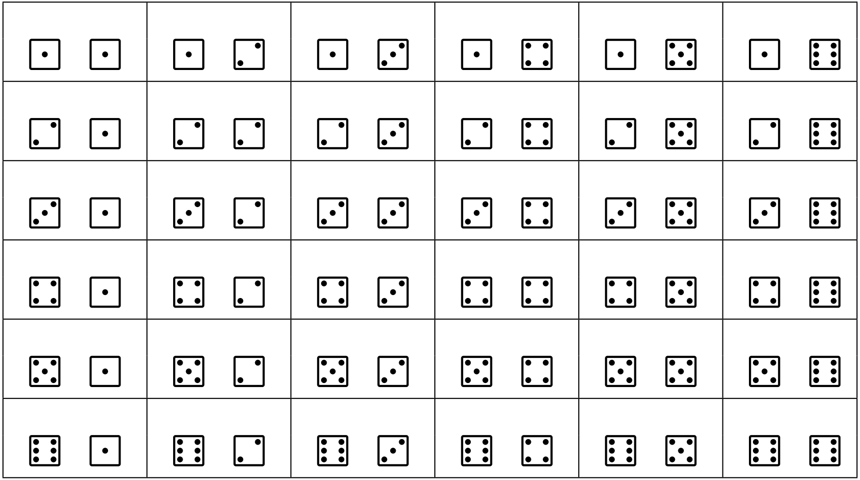
# Lancé de **deux** dés

**Exercice** : A = « premier résultat est pair »et B = « second résultat est plus grand que 5 »sont-ils indépendants ?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ⚀ ⚀ | ⚀ ⚁ | ⚀ ⚂ | ⚀ ⚃ | ⚀ ⚄ | ⚀ ⚅ |
| ⚁ ⚀ | ⚁ ⚁ | ⚁ ⚂ | ⚁ ⚃ | ⚁ ⚄ | ⚁ ⚅ |
| ⚂ ⚀ | ⚂ ⚁ | ⚂ ⚂ | ⚂ ⚃ | ⚂ ⚄ | ⚂ ⚅ |
| ⚃ ⚀ | ⚃ ⚁ | ⚃ ⚂ | ⚃ ⚃ | ⚃ ⚄ | ⚃ ⚅ |
| ⚄ ⚀ | ⚄ ⚁ | ⚄ ⚂ | ⚄ ⚃ | ⚄ ⚄ | ⚄ ⚅ |
| ⚅ ⚀ | ⚅ ⚁ | ⚅ ⚂ | ⚅ ⚃ | ⚅ ⚄ | ⚅ ⚅ |

# Lancé de **deux** dés

**Exercice** : $A =$ « résultat pair » et $B =$ « la somme des deux résultats est plus grande que 8 » sont-ils indépendants ?



# Lancé de **deux** dés

**Exercice** : A = « résultat pair » et B = « la somme des deux résultats est égale à 9 » sont-ils indépendants ?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ⚀ ⚀ | ⚀ ⚁ | ⚀ ⚂ | ⚀ ⚃ | ⚀ ⚄ | ⚀ ⚅ |
| ⚁ ⚀ | ⚁ ⚁ | ⚁ ⚂ | ⚁ ⚃ | ⚁ ⚄ | ⚁ ⚅ |
| ⚂ ⚀ | ⚂ ⚁ | ⚂ ⚂ | ⚂ ⚃ | ⚂ ⚄ | ⚂ ⚅ |
| ⚃ ⚀ | ⚃ ⚁ | ⚃ ⚂ | ⚃ ⚃ | ⚃ ⚄ | ⚃ ⚅ |
| ⚄ ⚀ | ⚄ ⚁ | ⚄ ⚂ | ⚄ ⚃ | ⚄ ⚄ | ⚄ ⚅ |
| ⚅ ⚀ | ⚅ ⚁ | ⚅ ⚂ | ⚅ ⚃ | ⚅ ⚄ | ⚅ ⚅ |

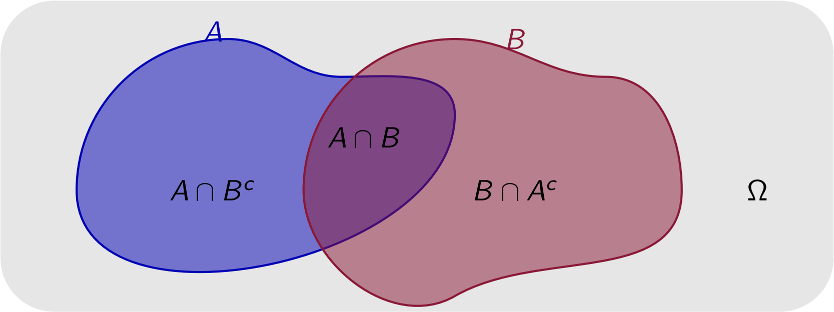
# Probabilité conditionnelle

## Definition (Loi de probabilité conditionnelle)

On appelle probabilité de B sachant A la probabilité

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Cette probabilité représente la vraisemblance que A arrive si l'on sait que B est vérifié.



# Probabilité conditionnelle

**Exercice** :

- Que vaut $\mathbb{P}[B|A]$ si $B$ n'apporte aucune information sur $A$ ?
- Que vaut $\mathbb{P}[B|A]$ si $A$ implique $B$ ?
- Que vaut $\mathbb{P}[B|A]$ si les évènements $A$ et $B$ sont incompatibles ?

**Exercice** : Que vaut la probabilité qu'un SNP soit variable dans la population africaine (A) s'il est variable dans la population asiatique (B), sachant que $P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.8$ et $P(A \cap B) = 0.6$ ?

# Loi de Bayes

## Proposition

L'égalité suivante est vérifiée pour tous évènements A et B :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A).$$

Si deux évènements sont indépendants alors $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

# Bayes : escargots

**Exercice**

On observe une population d'escargots dont 45% ont une couleur rose, 55% ont une couleur jaune, 30% ont des rayures et 20% sont à la fois roses et rayés.

- La présence ou l'absence de rayures est elle dépendante de la couleur de l'escargot ?
- Si un escargot est rose, quelle est la probabilité qu'il soit rayé ?

Pour répondre à ces questions, on définit les évènements :

- R = l'escargot est rose
- S = l'escargot est rayé

et on calcule $\mathbb{P}[R \cap S]$, $\mathbb{P}[R]\mathbb{P}[S]$ et $\mathbb{P}(S|R)$.

# Loi des causes totales

**Hypothèse** : les évènements $\{C_1, \ldots C_n\}$ forment une partition de $\Omega$

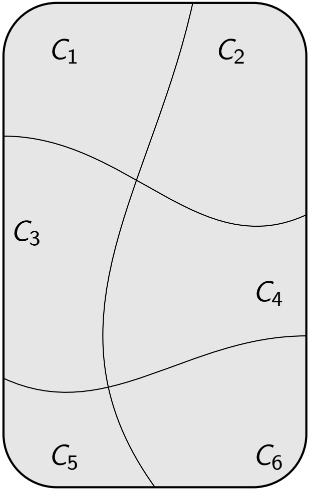
- Les $C_i$ sont incompatibles deux à deux
- $\cup_i C_i = \Omega$

Alors

$$P(A) = \sum_{k=1}^{N} P(A \cap C_k)$$

Puis, en appliquant la loi de Bayes à chacun des termes de la somme ci dessus :

$$P(A) = \sum_{k=1}^{N} P(A|C_k)P(C_k)$$



# Loi des causes totales

**Hypothèse** : les évènements $\{C_1, \ldots C_n\}$ forment une partition de $\Omega$

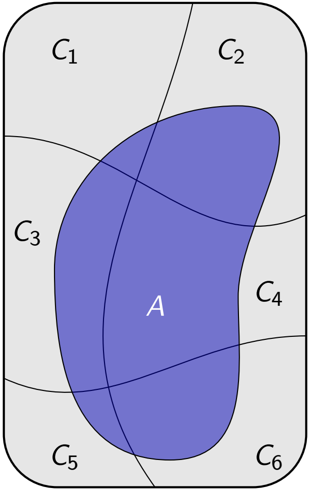
- Les $C_i$ sont incompatibles deux à deux
- $\cup_i C_i = \Omega$

Alors

$$P(A) = \sum_{k=1}^{N} P(A \cap C_k)$$

Puis, en appliquant la loi de Bayes à chacun des termes de la somme ci dessus :

$$P(A) = \sum_{k=1}^{N} P(A|C_k)P(C_k)$$



# Allèles et hérédité

**Exercice** : Deux allèles A et a d'un même gène apparaissent de telle manière que les fréquences dans la population des génotypes AA, Aa et aa sont respectivement 0.49, 0.42 et 0.09. Une femme AA a un enfant avec un homme dont le génotype est inconnu (supposé choisi aléatoirement dans la population).

Quelle est la probabilité que l'enfant ait un génotype Aa ?

# Allèles et hérédité

**Exercice** : Deux allèles A et a d'un même gène apparaissent de telle manière que les fréquences dans la population des génotypes AA, Aa et aa sont respectivement 0.49, 0.42 et 0.09. Une femme AA a un enfant avec un homme dont le génotype est inconnu (supposé choisi aléatoirement dans la population).

Quelle est la probabilité que l'enfant ait un génotype Aa ?

On veut calculer $\mathbb{P}(\text{enfant Aa})$, sans connaître le génotype de l'homme.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{enfant Aa}) &= \mathbb{P}(\text{enfant Aa} \cap \text{père AA}) + \mathbb{P}(\text{enfant Aa} \cap \text{père aa}) \\
&\quad + \mathbb{P}(\text{enfant Aa} \cap \text{père Aa}) \\
&= \mathbb{P}(\text{père AA})\mathbb{P}(\text{enfant Aa}|\text{père AA}) + \mathbb{P}(\text{père Aa})\mathbb{P}(\text{enfant Aa}|\text{père Aa}) \\
&\quad + \mathbb{P}(\text{père aa})\mathbb{P}(\text{enfant Aa}|\text{père aa}) \\
&= 0.49 \times 0 + 0.42 \times 0.5 + 0.09 \times 1 = 0.3
\end{aligned}$$

# Test génétique

**Exercice** : Une maladie B touchant la population a trois formes : $B_1$ (légère), $B_2$ (sérieuse) et $B_3$ (mortelle). Un gène $A$ a deux types $A_1$ (protecteur contre $B$) et $A_2$. Trois quarts de la population a la forme $A_1$ du gène, et le quart qui reste a la forme $A_2$.

On sait également que $\mathbb{P}(B_1|A_1) = 0.9$, $\mathbb{P}(B_1|A_1) = 0.1$, $\mathbb{P}(B_3|A_1) = 0$, alors que $\mathbb{P}(B_1|A_2) = 0$, $\mathbb{P}(B_2|A_2) = 0.5$, $\mathbb{P}(B_3|A_2) = 0.5$.

Quelle est la probabilité qu'une personne ait le gène $A_1$ sachant qu'elle a la forme $B_2$ de la maladie ?

# Le paradoxe de Monty-Hall

**Exercice** : Un candidat à un jeu télévisé est placé devant trois portes fermées. Derrière l'une d'elles il y a un trésor. Le candidat commence par se placer devant une des trois portes, sans que ce qui se cache derrière soit révélé. Puis le présentateur (qui connaît l'emplacement du trésor) ouvre (obligatoirement) une autre porte derrière laquelle il n'y a pas de trésor. Enfin, le présentateur donne au candidat la possibilité de changer de choix quant à la porte à ouvrir définitivement : soit la seule porte restante (celle que le présentateur a laissée fermée) ou bien celle devant laquelle il se trouve. Le joueur augmente-t-il ses chances de trouver le trésor s'il change son choix initial ?

# Cinquième partie V

# Variables aléatoires

# Variable aléatoire

**Definition**

Une variable aléatoire (abbr. v.a) réelle est une application

$$X \ : \ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Si $X$ prend ses valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable, on parle de **variable aléatoire discrète**.

# Exemples de variables aléatoires

- Dans le cas du score du match de foot, on peut poser $X_1$ et $X_2$ les variables aléatoires dites *coordonnées* telles que :

$$\begin{cases} X_1(\omega) = m \\ X_2(\omega) = n \end{cases}$$

- Si on lance une pièce de monnaie et qu'on considère qu'un joueur gagne 10 euros si la pièce tombe sur pile et 0 sinon, on peut poser X le gain du joueur :

$$X(\omega) = \begin{cases} \mathit{10\ si}\ \omega = P \\ \mathit{0\ si}\ \omega = F \end{cases}$$

# Loi d'une variable aléatoire

**Definition**

Soit $X$ une variable aléatoire discrète, prenant ses valeurs dans l'ensemble $X(\Omega)$. On appelle **loi** de $X$ la donnée de l'ensemble des valeurs $\mathbb{P}[X = x_i]$, ou $x_i \in X(\Omega)$.

Si $X$ prend un nombre fini de valeurs, on peut réprésenter sa loi sous la forme d'un tableau

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $\dots$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}[X = x_i]$ | $p_1$ | $p_2$ | $\dots$ | $p_n$ |

avec la notation $p_1 = \mathbb{P}(X = x_1), \dots p_n = \mathbb{P}(X = x_n)$. Evidemment, on doit avoir $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

⚠ ATTENTION à bien comprendre la notation $\mathbb{P}[X = x_i]$ ⚠

# Loi d'une variable aléatoire

## Definition

Soit $X$ une variable aléatoire discrète, prenant ses valeurs dans l'ensemble $X(\Omega)$. On appelle **loi** de $X$ la donnée de l'ensemble des valeurs $\mathbb{P}[X = x_i]$, ou $x_i \in X(\Omega)$.

Si $X$ prend un nombre fini de valeurs, on peut réprésenter sa loi sous la forme d'un tableau

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $\dots$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}[X = x_i]$ | $p_1$ | $p_2$ | $\dots$ | $p_n$ |

avec la notation $p_1 = \mathbb{P}(X = x_1), \dots p_n = \mathbb{P}(X = x_n)$. Evidemment, on doit avoir $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

⚠ ATTENTION à bien comprendre la notation $\mathbb{P}[X = x_i]$ ⚠

**Exercice** : On considère un jeu de pile ou face à trois manches successives. Le joueur gagne 10 euros s'il tombe sur face, et en perd 10 s'il tombe sur pile. Représenter la loi de son gain après trois manches sous la forme d'un tableau.

# Espérance

**Definition**

Soit une variable aléatoire $X$ qui prend ses valeurs dans l'ensemble $x_1, \ldots, x_n$, avec probabilités $(p_1, \ldots, p_n)$ (autrement dit, $P(X = x_i) = p_i$). L'espérance mathématique de X est

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

# Propriétés de l'espérance

**Proposition**

Soient X et Y deux variables aléatoires et $\lambda \in \mathbb{R}$ un nombre réel, on a alors

- $E(\lambda) = \lambda$
- $E(\lambda X) = \lambda E(X)$
- $E(X + \lambda) = E(X) + \lambda$
- $E(\lambda_1 X + \lambda_2 Y) = \lambda_1 E(X) + \lambda_2 E(Y)$

⚠ Attention cependant, meme si l'espérance admet beaucoup de propriétés qui la rendent agréable, elle ne respecte pas en général la multiplication ($E(XY) \neq E(X)E(Y)$).

# Exemple : naissances en Chine

**Exercice** : Les autorités chinoises ont décrété qu'une famille ne peut avoir que deux enfants, et encore, seulement si le premier est une fille. On demande si cela peut modifier la proportion de garçons et de filles. On fait l'hypothèse que les différentes naissances dans une même famille sont indépendantes les unes des autres. On note $p_F$ la probabilité d'avoir une fille lors d'une naissance et $p_G = 1 - p_F$ la probabilité d'avoir un garçon.

- Calculer l'espérance du nombre de filles dans une famille.
- Calculer l'espérance du nombre de garçons dans une famille.
- Conclure.

# Exemple : naissances en Chine

**Exercice** : Les autorités chinoises ont décrété qu'une famille ne peut avoir que deux enfants, et encore, seulement si le premier est une fille. On demande si cela peut modifier la proportion de garçons et de filles. On fait l'hypothèse que les différentes naissances dans une même famille sont indépendantes les unes des autres. On note $p_F$ la probabilité d'avoir une fille lors d'une naissance et $p_G = 1 - p_F$ la probabilité d'avoir un garçon.

- Calculer l'espérance du nombre de filles dans une famille.
- Calculer l'espérance du nombre de garçons dans une famille.
- Conclure.

$$\mathbb{E}[\#F] = p_F p_G + 2p_F^2 = p_F(p_G + 2p_F) = p_F(1 + p_F)$$
$$\mathbb{E}[\#G] = p_G + p_F p_G = p_G(1 + p_F)$$

donc

$$\frac{\mathbb{E}[\#F]}{\mathbb{E}[\#G]} = \frac{p_F}{p_G}.$$

La proportion relative de filles et de garçons dans la population ne change pas !

# Variance

Mesure les écarts quadratiques de $X$ par rapport à sa moyenne.

## Definition

On appelle *variance* de la v.a $X$ la quantité

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

## Proposition

La variance d'une variable aléatoire est toujours **posititive** ! ! !

## Proposition

Si $X$ est une variable discrète prenant les valeurs $\{x_1, \ldots, x_n\}$, avec probabilités $(p_1, \ldots, p_n)$, alors sa variance vaut

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \mathbb{E}[X])^2.$$

# Ecart-type

Cette mesure de dispersion a un défaut ; elle n'est pas dans la même dimension (unité) que la v.a X car elle est de la dimension de $X^2$. Ainsi si on a une variable aléatoire en mètres, sa variance sera en mètres carrés. C'est pour cette raison qu'on utilise en pratique plus souvent la mesure de l'*écart type*, qui n'est rien de plus que la racine carrée de la variance.

**Definition**

On appelle *écart-type* de la v.a $X$ la quantité

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

# Propriétés de la variance

**Proposition**

Soient X et Y deux v.a, $\lambda, \beta$ deux nombres réels.

- $\mathrm{Var}(\lambda X + \beta) = \lambda^2 \mathrm{Var}(X)$
- $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y)$ où $\mathrm{Cov}$ désigne la *covariance* de X et Y définie comme :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))$$

Cette valeur est liée au coefficient de corrélation qui est défini comme $\mathrm{Cov}(X, Y)/(\sigma_X \sigma_y)$.

# Exercice : *Le joueur* de Dostoievski

Extrait du *Joueur* de Dostoievski :

*"In the succession of fortuitous events, there is, if not a system, at least some kind of order. (...) It's very odd. On some afternoon or morning, black alternates with red, almost without any order and all the time. Each color only appears two or three times in a row. The next day or evening,* **red alone turns, for example, up to twenty times in a row.** *"*

*"That time, as if on purpose, a circumstance arose which, incidentally, recurs rather frequently in gambling. Luck sticks, for example, with red and does not leave it for ten or even fifteen turns. Only two days before, I had heard that* **red had come out twenty two times in a row in the previous week**. *One could never recall a similar case at roulette and it was spoken of with astonishment."*

# Exercice : *Le joueur* de Dostoievski

Extrait du *Joueur* de Dostoievski :

*"In the succession of fortuitous events, there is, if not a system, at least some kind of order. (...) It's very odd. On some afternoon or morning, black alternates with red, almost without any order and all the time. Each color only appears two or three times in a row. The next day or evening,* **red alone turns, for example, up to twenty times in a row.** *"*

*"That time, as if on purpose, a circumstance arose which, incidentally, recurs rather frequently in gambling. Luck sticks, for example, with red and does not leave it for ten or even fifteen turns. Only two days before, I had heard that* **red had come out twenty two times in a row in the previous week**. *One could never recall a similar case at roulette and it was spoken of with astonishment."*

Pourquoi 22 ?

# Exercice : *Le joueur* de Dostoievski

**Exercice** :

- Quelle est la probabilité que le rouge apparaisse 22 fois de suite à la roulette ? (on rappelle qu'il y a 18 cases rouges sur 37 sur une roulette).
- Quelle est l'espérance du nombre d'occurrences de cet évènement dans une série de $n$ parties de roulettes indépendantes ?
- Pour quelle valeur de $n$ cette espérance devient plus grande que 1 ? (c-à-d que l'évènement devient vraisemblable).
- Le nombre de 22 utilisé par Dostoievski est-il vraisemblable ?

# Exercice : *Le joueur* de Dostoievski

**Exercice** :

- Quelle est la probabilité que le rouge apparaisse 22 fois de suite à la roulette ? (on rappelle qu'il y a 18 cases rouges sur 37 sur une roulette).
- Quelle est l'espérance du nombre d'occurrences de cet évènement dans une série de $n$ parties de roulettes indépendantes ?
- Pour quelle valeur de $n$ cette espérance devient plus grande que 1 ? (c-à-d que l'évènement devient vraisemblable).
- Le nombre de 22 utilisé par Dostoievski est-il vraisemblable ?

*"According to Aristotle, it is a rule of poetry, epics and tragedy to put their heroes in exceptional situations."*

*"All possible long sequences are equally exceptional since they all have a very low probability, but according to Dostoievski, most of their observations of roulette focus on a very small number of specific kinds of series which are clearly the only ones likely to be perceived as exceptional."*

Extraits de *From Gestalt Theory to Image Analysis : A Probabilistic Approach*, Agnès Desolneux, Lionel Moisan, Jean-Michel Morel.

# Sixième partie VI

## Distributions usuelles

# Loi uniforme

Sert à modéliser l'équiprobabilité.

**Definition**

Une variable aléatoire $X$ suit une loi uniforme discrète sur $\{1, \ldots, n\}$ si et seulement si

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \quad P[X = k] = \frac{1}{n}.$$

Résultat d'un jet de dé équilibré, $n = 6$, $\mathbb{E}[X] = \quad$ , $\mathrm{Var}[X] =$

- $\mathbb{E}[X] =$
- $\mathrm{Var}[X] =$

# Loi uniforme

Sert à modéliser l'équiprobabilité.

**Definition**

Une variable aléatoire $X$ suit une loi uniforme discrète sur $\{1, \ldots, n\}$ si et seulement si

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \quad P[X = k] = \frac{1}{n}.$$

Résultat d'un jet de dé équilibré, $n = 6$, $\mathbb{E}[X] =$ , $\mathrm{Var}[X] =$

- $\mathbb{E}[X] = \frac{n+1}{2}$
- $\mathrm{Var}[X] = \frac{n^2-1}{12}$

# Loi uniforme

Sert à modéliser l'équiprobabilité.

**Definition**

Une variable aléatoire $X$ suit une loi uniforme discrète sur $\{1, \ldots, n\}$ si et seulement si

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \quad P[X = k] = \frac{1}{n}.$$

Résultat d'un jet de dé équilibré, $n = 6$, $\mathbb{E}[X] = \frac{7}{2}$, $\mathrm{Var}[X] = \frac{35}{12}$

- $\mathbb{E}[X] = \frac{n+1}{2}$
- $\mathrm{Var}[X] = \frac{n^2-1}{12}$

# Loi de Bernoulli

**Definition**

Une v.a. $X$ suit une loi de Bernoulli si elle modélise une expérience aléatoire qui n'a que deux issues possibles (vrai ou faux, pile ou face, etc). On représente une des deux issues par l'évènement $\{X = 1\}$ et l'autre par $\{X = 0\}$. Cette loi est entièrement déterminée par le paramètre $p$ tel que

$$\mathbb{P}[X = 1] = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}[X = 0] = 1 - p.$$

Ex : Jeu de Pile ou Face.

**Espérance et variance d'une loi de Bernoulli de paramètre $p$**

- $\mathbb{E}(X) =$
- $\mathrm{Var}(X) =$

# Loi de Bernoulli

**Definition**

Une v.a. $X$ suit une loi de Bernoulli si elle modélise une expérience aléatoire qui n'a que deux issues possibles (vrai ou faux, pile ou face, etc). On représente une des deux issues par l'évènement $\{X = 1\}$ et l'autre par $\{X = 0\}$. Cette loi est entièrement déterminée par le paramètre $p$ tel que

$$\mathbb{P}[X = 1] = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}[X = 0] = 1 - p.$$

Ex : Jeu de Pile ou Face.

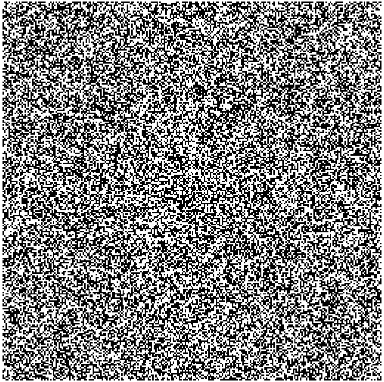
**Espérance et variance d'une loi de Bernoulli de paramètre $p$**

- $\mathbb{E}(X) = p$
- $\mathrm{Var}(X) = p(1 - p)$

# Exercice : Carré noir dans une image aléatoire Bernoulli

**Modèle aléatoire** : Image $L \times L$, dont les pixels sont des réalisations de variables i.i.d $\sim$ Bernouilli de paramètre $p$.

$L = 256,\ p = 0.5$



**Exercice** : Soit $l$ un entier positif. Calculer l'espérance du nombre de carrés entièrement noirs de taille supérieure ou égale à $l$ dans l'image.

# Exercice : Carré noir dans une image aléatoire Bernoulli

Soit $M$ un pixel de l'image,

$$\mathbb{P}[\text{ "le carré de côté } l \text{ en position } M \text{ est tout noir" }] = \quad .$$

# Exercice : Carré noir dans une image aléatoire Bernoulli

Soit $M$ un pixel de l'image,

$$\mathbb{P}[\text{ "le carré de côté } l \text{ en position } M \text{ est tout noir" }] = p^{l^2}.$$

# Exercice : Carré noir dans une image aléatoire Bernoulli

Soit $M$ un pixel de l'image,

$$\mathbb{P}[\text{ "le carré de côté } l \text{ en position } M \text{ est tout noir" }] = p^{l^2}.$$

$$\mathbb{E}[\text{Nombre de carrés noirs de côté } l \text{ dans l'image}] =$$

# Exercice : Carré noir dans une image aléatoire Bernoulli

Soit $M$ un pixel de l'image,

$$\mathbb{P}[\text{ "le carré de côté } l \text{ en position } M \text{ est tout noir" }] = p^{l^2}.$$

$$\mathbb{E}[\text{Nombre de carrés noirs de côté } l \text{ dans l'image}] = p^{l^2}(L-l)^2.$$

# Exercice : Carré noir dans une image aléatoire Bernoulli

Soit $M$ un pixel de l'image,

$$\mathbb{P}[\text{ "le carré de côté } l \text{ en position } M \text{ est tout noir" }] = p^{l^2}.$$

$$\mathbb{E}[\text{Nombre de carrés noirs de côté } l \text{ dans l'image}] = p^{l^2}(L-l)^2.$$

$$\mathbb{E}[\text{Nb de carrés noirs de côté } k \geq l] =$$

# Exercice : Carré noir dans une image aléatoire Bernoulli

Soit $M$ un pixel de l'image,

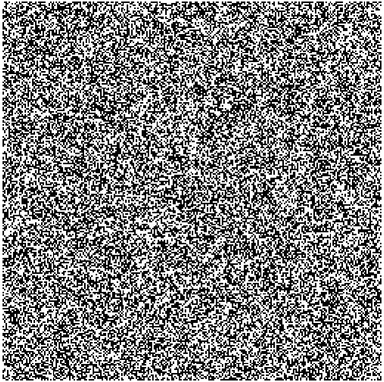
$$\mathbb{P}[\text{ "le carré de côté } l \text{ en position } M \text{ est tout noir" }] = p^{l^2}.$$

$$\mathbb{E}[\text{Nombre de carrés noirs de côté } l \text{ dans l'image}] = p^{l^2}(L-l)^2.$$

$$\mathbb{E}[\text{Nb de carrés noirs de côté } k \geq l] = \sum_{k \geq l} p^{k^2}(L-k)^2.$$

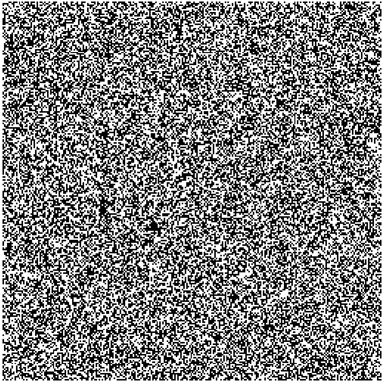
# Exercice : Carré noir dans une image aléatoire Bernoulli

$L = 256$, $p = 0.5$
$l = 3$. $\mathbb{E} = 125.9$.



# Exercice : Carré noir dans une image aléatoire Bernoulli

$L = 256$, $p = 0.5$
$l = 5$. $\mathbb{E} = 0.001$.



# Loi Binômiale

## Definition

Une v.a. $S$ suit une loi Binômiale $\mathcal{B}(n, p)$ si elle s'écrit comme une somme de $n$ variables de Bernoulli de même paramètre $p$ et indépendantes. La v.a. $S$ est à valeurs dans $\{0, \ldots, n\}$. Elle se caractérise par

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad P[S = k] = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

# Loi Binômiale

## Definition

Une v.a. $S$ suit une loi Binômiale $\mathcal{B}(n, p)$ si elle s'écrit comme une somme de $n$ variables de Bernoulli de même paramètre $p$ et indépendantes. La v.a. $S$ est à valeurs dans $\{0, \ldots, n\}$. Elle se caractérise par

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad P[S = k] = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Nombre $S$ de « Faces » obtenus dans une série de $n$ lancers indépendants de la même pièce,

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

avec les $X_i$ des variables de Bernoulli de paramètre $p$ et indépendantes

# Loi Binômiale

## Definition

Une v.a. $S$ suit une loi Binômiale $\mathcal{B}(n, p)$ si elle s'écrit comme une somme de $n$ variables de Bernoulli de même paramètre $p$ et indépendantes. La v.a. $S$ est à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$. Elle se caractérise par

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad P[S = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Nombre $S$ de « Faces » obtenus dans une série de $n$ lancers indépendants de la même pièce,

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

avec les $X_i$ des variables de Bernoulli de paramètre $p$ et indépendantes

**Espérance et variance d'une loi Binômiale** $\mathcal{B}(n, p)$

- $\mathbb{E}(S) =$
- $\mathrm{Var}(S) =$

# Loi Binômiale

## Definition

Une v.a. $S$ suit une loi Binômiale $\mathcal{B}(n,p)$ si elle s'écrit comme une somme de $n$ variables de Bernoulli de même paramètre $p$ et indépendantes. La v.a. $S$ est à valeurs dans $\{0,\ldots,n\}$. Elle se caractérise par

$$\forall k \in \{0,1,\ldots,n\},\quad P[S=k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Nombre $S$ de « Faces » obtenus dans une série de $n$ lancers indépendants de la même pièce,

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

avec les $X_i$ des variables de Bernoulli de paramètre $p$ et indépendantes

**Espérance et variance d'une loi Binômiale** $\mathcal{B}(n,p)$

- $\mathbb{E}(S) = np$
- $\mathrm{Var}(S) = np(1-p)$

# Loi Binômiale

Si l'on considère la queue de cette loi binômiale

$$\mathbb{P}[S \geq k_0] = \sum_{k=k_0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

$=$ probabilité qu'au moins $k_0$ des tirages $X_i$ vaillent 1. Si $k_0 > pn$, $\mathcal{B}(n, k_0, p)$ devient rapidement très petit...

**Exercice** : Vérifier à l'aide de la formule du binôme que la loi binômiale est bien une loi de probabilité

# Exercice : efficacité d'un traitement

**Traitement Anturane contre l'infractus du myocarde**

| | traitement | placebo |
|---|---|---|
| patients | 813 | 816 |
| décès | 74 | 89 |
| % mortalité | 9.1 % | 10.9 % |

La probabilité de prendre le traitement plutôt que le placebo est environ $\frac{1}{2}$.
Soit $\mathcal{H}_0$ l'hypothèse : ≪ la prise du traitement par un patient et son décès ou non sont deux évènements indépendants ≫.
Au total, 163 patients décèdent. Pour $i = 1 \dots 163$, soit

$$X_i = \mathbf{1}_{\ll \text{ le patient prend le traitement } \gg}.$$

On peut supposer que chaque $X_i$ est une variable de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Donc sous $\mathcal{H}_0$, le nombre de patients décédés et ayant pris le traitement suit une loi binômiale :

$$\sum_{i=1}^{163} X_i \sim \mathcal{B}(163, \frac{1}{2}).$$

# Exercice : efficacité d'un traitement

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{163} X_i \leq 74|) &= \sum_{k=1}^{74} \binom{163}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{74} \binom{163}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= 0.1364.
\end{aligned}$$

Même si le traitement n'a aucun effet, il y a quand même 13.64% de chances (1 chance sur 7 environ) d'observer par hasard moins de 74 décès parmi les patients prenant le traitement, ce qui est non négligeable. On ne peut donc pas conclure que le traitement est efficace.

# Loi de Poisson

## Definition

Soit X une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. On dit que X est une varaible aléatoire poissonienne de paramètre $\lambda$ et on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ si et seulement si on a :

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

# Loi de Poisson

## Definition

Soit X une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. On dit que X est une varaible aléatoire poissonienne de paramètre $\lambda$ et on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ si et seulement si on a :

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

- Nombre de photons émis pendant une seconde par une source lumineuse.
- Nombre d'appels reçus par un standard téléphonique pendant une heure.
- Nombre de voyageurs se présentant à un guichet dans une journée. Etc.

# Loi de Poisson

## Definition

Soit X une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. On dit que X est une varaible aléatoire poissonienne de paramètre $\lambda$ et on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ si et seulement si on a :

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

- Nombre de photons émis pendant une seconde par une source lumineuse.
- Nombre d'appels reçus par un standard téléphonique pendant une heure.
- Nombre de voyageurs se présentant à un guichet dans une journée. Etc.

**Espérance et variance d'une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$**

- $\mathbb{E}(X) =$
- $\mathrm{Var}(X) =$

# Loi de Poisson

**Definition**

Soit X une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. On dit que X est une varaible aléatoire poissonienne de paramètre $\lambda$ et on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ si et seulement si on a :

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

- Nombre de photons émis pendant une seconde par une source lumineuse.
- Nombre d'appels reçus par un standard téléphonique pendant une heure.
- Nombre de voyageurs se présentant à un guichet dans une journée. Etc.

**Espérance et variance d'une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$**

- $\mathbb{E}(X) = \lambda$
- $\mathrm{Var}(X) = \lambda$

# Loi de Poisson

## Definition

Soit X une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. On dit que X est une varaible aléatoire poissonienne de paramètre $\lambda$ et on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ si et seulement si on a :

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

- Nombre de photons émis pendant une seconde par une source lumineuse.
- Nombre d'appels reçus par un standard téléphonique pendant une heure.
- Nombre de voyageurs se présentant à un guichet dans une journée. Etc.

**Espérance et variance d'une loi de Poisson** $\mathcal{P}(\lambda)$

- $\mathbb{E}(X) = \lambda$
- $\mathrm{Var}(X) = \lambda$

**Exercice** : si une source lumineuse émet en moyenne $10^5$ photons par seconde, quelle est la probabilité qu'elle émette 90000 photons en une seconde ?