Mesures d'incohérence à base d'argumentations

Rapport

Master Informatique de l'Université d'Artois

Aurélien Lucas

Encadrants : Zied Bouraoui, Jean-Guy Mailly

UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Remerciements

Je souhaite, dans un premier temps remercier Zied Bouraoui et Jean-Guy Mailly pour leur encadrement durant tout le stage. Leurs conseils ont été fort utiles et m'ont guidé pendant ces dix semaines en plus de m'avoir donné envie de poursuivre en recherche.

Je souhaite également remercier l'ensemble des enseignants qui m'ont formé durant la licence et le master informatique ainsi que mes camarades pour l'ambiance apportée rendant le travail encore plus agréable.

Sommaire

Introduction

L'incohérence est un problème récurrent de la logique. Elle empêche le raisonnement mais il existe plusieurs stratégies pour y faire face. On peut par exemple l'accepter et alors la prendre en compte lors des résultats. La cohérence peut être restaurée, la logique paracohérente peut être utilisée, ou encore des mesures d'incohérence et des systèmes d'argumentation peuvent être employés. Il est alors intéressant de savoir quantifier la façon dont une base logique est incohérente. On définit pour cela des fonctions $\mathbf{I}(\mathcal{K})$, où $\mathcal{K}$ est une base de connaissances, qui associent à une base logique un nombre qui quantifie l'incohérence de la base.

Une possibilité que nous utiliserons pour définir des mesures d'incohérence est l'argumentation. Un système d'argumentation est un graphe orienté dont les nœuds sont des arguments et les arcs des attaques. Un tel système peut être construit à partir d'une base de connaissances exprimée sous forme de formules logiques. Nous allons donc construire un système d'argumentation à partir d'une base logique puis utiliser les propriétés de ce système afin de définir des mesures d'incohérence, le but étant que ces mesures satisfassent certaines propriétés.

Plusieurs travaux ont établi quelques propriétés de mesure d'incohérence à satisfaire pour être une «bonne» mesure. Nous allons principalement nous référer aux postulats d'Anthony Hunter et de Sébastien Konieczny, que nous appelons dans la suite *HK Postulates*.

Chapitre 1

État de l'art

Nous allons dans un premier temps présenter les notions requises au sujet de la logique propositionnelle. Puis nous introduirons les notions nécessaires aux mesures d'incohérence et à l'argumentation.

1.1 Logique propositionnelle

Commençons par définir les bases de la logique nécessaires dans la suite. Le langage formel de la logique propositionnelle, noté $\mathcal{L}$ est construit à partir d'un ensemble infini dénombrable de symboles $\mathcal{P} = a, b, ..$, appelés propositions ou symboles propositionnels. Une proposition est une variable booléenne représentant une assertion simple, qui ne peut prendre que la valeur *vrai* ou *faux* (respectivement 1 ou 0). Le langage $\mathcal{L}$ est construit à partir d'un ensemble de variables propositionnelles, de constantes booléennes $\top$ (vrai) et $\bot$ (faux) et d'un ensemble de connecteurs logiques.

Définition 1 (Connecteur logique)**.** *Un connecteur logique est une opérateur qui s'applique aux formules pour en faire une expression complexe.*

- *la négation :* $\neg$,
- *la conjonction :* $\wedge$,
- *la disjonction :* $\vee$,
- *l'implication :* $\rightarrow$,

- *l'équivalence :* $\leftrightarrow$.

Étant donné un langage $\mathcal{L}$, les éléments de $\mathcal{L}$ sont appelés formules propositionnelles (formules bien formées), notés α, β, $\ldots$, et sont définies de la manière suivant :

- $\top$ et $\bot$ sont des formules,
- une variable propositionnelle est une formule,
- si α et β sont des formules, alors $\neg\alpha$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$ et $\alpha \leftrightarrow b$ sont des formules.

Il est possible de réécrire certaines formules en suivant les lois de De Morgan.

Propriété 1. *La négation de la disjonction est équivalente à la conjonction des négations des formules :* $\neg(\alpha \vee \beta) = \neg\alpha \wedge \neg\beta$

Propriété 2. *La négation de la conjonction est équivalente à la disjonction des négations des formules :* $\neg(\alpha \wedge \beta) = \neg\alpha \vee \neg\beta$

Propriété 3. *Une valuation* ω *est la valeur de vérité associée à chaque variable propositionnelle.*

Exemple 1. *Soit* ω *telle que* $\omega(\alpha) = 1$ *et* $\omega(\beta) = 0$*. Alors* $\omega(\neg\alpha) = 0$, $\omega(\alpha \wedge \beta) = 0$, $\omega(\alpha \vee \beta) = 1$ *et* $\omega(\alpha \rightarrow \beta) = 0$.

Comme montré ci-dessus, une valeur de vérité peut également être associée à toute formule propositionnelle, aussi complexe soit-elle, dès qu'une valeur de vérité est associée à chacune des variables propositionnelles qui la composent.

Définition 2 (Interprétation des formules)**.** *Une interprétation d'une formule* α*,notée* $\omega(\alpha)$*, est une valuation de toutes les variables propositionnelles de* α*.* $\omega(\top)$ *est vraie et* $\omega(\bot)$ *est fausse.*

Si une interprétation d'une formule propositionnelle résulte en une valeur de vérité *vraie* alors cette interprétation est un modèle de cette formule.

Définition 3 (Modèle d'une formule)**.** *Soient* α *une formule de* $\mathcal{P}$ *et* ω *une interprétation.* ω *est un modèle de* α *si et seulement si* $\omega(\alpha)$ *est vraie. On dit alors que* ω *satisfait* α *et on note* $\omega \models \alpha$.

On note $\mathrm{Mod}(\alpha)$ l'ensemble des modèles de α.

Le problème SAT consiste à déterminer si une formule possède au moins un modèle.

Définition 4 (Formule satisfaisable)**.** *Soit α une formule de $\mathcal{L}$, α est dite satisfaisable ou cohérente s'il existe au moins une interprétation ω^i tel que $\omega^i \models \alpha$. Autrement dit, une formule cohérente possède au moins un modèle.*

Définition 5. *Une formule φ est libre pour X si et seulement si $\nexists Y \subseteq X$ tel que $Y \cup \alpha \vdash \perp$ pour aucun sous ensemble cohérent Y de X.*

Définition 6. *Une base de connaissance (notée $\mathcal{K}$) est un ensemble de formules propositionnelles interprété conjonctivement.*

Définition 7. *$\alpha \vdash \beta$ signifie que β est dérivable à partir de α.*

On note $\alpha \vdash \beta$ si et seulement si $\text{Mod}(\alpha) \leq \text{Mod}(\beta)$.
α et β sont équivalentes, noté $\alpha \equiv \beta$ si et seulement si $\text{Mod}(\alpha) = \text{Mod}(\beta)$.

1.2 Mesures d'incohérence

Le but des mesures d'incohérence est de quantifier l'incohérence d'une base de connaissances. Il a été établi plusieurs propriétés à satisfaire pour une mesure d'incohérence dans divers travaux. Les travaux d'Anthony Hunter et de Sébastien Konieczny [HK05] sur les mesures d'incohérence ont mis en avant quatre propriétés à satisfaire sur lesquelles nous nous appuierons dans un premier temps. Dans la suite, nous appelons ces propriétés les *HK Postulates*.

- (HK1) $\mathbf{I}(\mathcal{K}) = 0$ si et seulement si $\mathcal{K} \nvdash \perp$ (Cohérence nulle)
- (HK2) $\mathbf{I}(\mathcal{K} \cup \mathcal{K}') \geq \mathbf{I}(\mathcal{K})$ (Monotonie)
- (HK3) Si α est libre pour la base $\mathcal{K}$ alors $\mathbf{I}(\mathcal{K} \cup \alpha) = \mathbf{I}(\mathcal{K})$ (Indépendance de formules libres)
- (HK4) Si $\alpha \vdash \beta$ et $\alpha \nvdash \perp$ alors $\mathbf{I}(\mathcal{K} \cup \alpha) \geq \mathbf{I}(\mathcal{K} \cup \beta)$ (Dominance)

La première (HK1) de ces quatre propriétés est celle qui nous permet de savoir si la base est cohérente. En effet, le degré d'incohérence est nul uniquement si il n'y a aucune contradiction, sinon on y associe une valeur supérieure à 0.

La seconde (HK2) vérifie que l'union des formules de deux bases est au moins aussi incohérente qu'une seule des deux bases.

La troisième (HK3) signifie que le degré d'incohérence d'une base ne change pas si on lui ajoute une formule α telle que pour tout sous-ensemble cohérent de la base, α est cohérente avec ce sous-ensemble.

La dernière (HK4) indique que si on sait déduire β de α alors l'union d'une base avec α est au moins aussi incohérente que cette base avec β.

Des alternatives ainsi que d'autres propriétés ont été proposées notamment par Philippe Besnard [Bes14].

Définition 8. *β est une forme prénormale de α si β est obtenu à partir de α par application (éventuellement répétée) de l'associativité, de la commutativité, de la distribution de la conjonction et disjonction, des lois de De Morgan ou de l'équivalence avec double négativité.*

Grâce à cette définition, de nouveaux postulats peuvent être introduits :

- (B1) Si β est une forme prénormale de α, alors $\mathbf{I}(\mathcal{K} \cup \alpha) = \mathbf{I}(\mathcal{K} \cup \beta)$ (Réécriture)

En reprenant l'idée de la monotonie, on peut l'appliquer à la conjonction. En effet $\alpha \wedge \beta$ ne peut pas comporter moins d'information que α :

- (B2) $\mathbf{I}(\mathcal{K} \cup \{\alpha \wedge \beta\}) \geq \mathbf{I}(\mathcal{K} \cup \{\alpha\})$ (Conjonction dominance)

1.3 Argumentation

Un système d'argumentation est un moyen pour gérer des informations conflictuelles permettant ainsi de déduire certaines conclusions. On peut étudier de telles informations de façon abstraite, c'est à dire sans se soucier de leur structure interne, ou au contraire en se basant sur les relations logiques entre ces informations. Nous introduirons ces différents cadres formels dans cette section.

1.3.1 Argumentation abstraite

Les travaux de Dung [Dun95] sur l'argumentation sont à l'origine de la plupart des travaux sur l'argumentation abstraite. En effet, cette argumentation ignore la structure des arguments utilisée, mais se concentre sur la relation entre les arguments. Un argument en attaque un autre si le premier permet d'invalider le second. De cette façon, le système peut-être vu comme un graphe dirigé où les nœuds représentent les arguments, et les arcs représentent les attaques.

1.3.1.1 Système d'argumentation

Définition 9. *Un système d'argumentation* ($\mathcal{A}$,$\mathcal{R}$) *est un graphe où* $\mathcal{A}$ *est un ensemble d'arguments et* $\mathcal{R}$ *une relation d'attaque entre deux arguments* ($\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$).

Intuitivement, $(a,b) \in \mathcal{R}$ signifie que l'acceptation de a provoque le rejet de b.

Exemple 2. *Soit un système d'argumentation* $(\mathcal{A}, \mathcal{R})$ *tel que* $\mathcal{A} = \{a,b,c\}$, $\mathcal{R} = \{(a,b),(b,c)\}$. *Dans ce système* a *attaque* b *et* b *attaque* c.

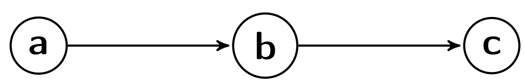

Figure 1.1: Système d'argumentation

Dans cet exemple, à l'issu du débat, on conserve l'argument a et l'argument c car le premier n'est pas attaqué, et le second est défendu alors qu'on rejette b qui est invalidé par a.

Définition 10 (Ensemble sans conflit)**.** *Un ensemble d'argument* $\mathcal{S}$ *est sans conflit si et seulement si pour tout argument* a,b $\in \mathcal{S}$, (a,b) $\notin \mathcal{R}$.

La notion d'attaque peut alors être appliquée à un ensemble d'argument.

Définition 11 (Attaque par un ensemble d'arguments)**.** *Un ensemble d'arguments* $\mathcal{S}$ *attaque un argument* a *s'il existe un argument* b $\in \mathcal{S}$ *tel que* (b,a) $\in \mathcal{R}$.

Un tel ensemble accepte alors un argument s'il n'est pas attaqué ou s'il peut être défendu contre toute attaque. Cet ensemble est donc capable de se défendre lui même.

Définition 12 (Argument acceptable)**.** *Un argument* a *est dit acceptable par* $\mathcal{S}$ *si et seulement si* $\forall \mathrm{b} \in \mathcal{A}$ *tel que* $(\mathrm{b}, \mathrm{a}) \in \mathcal{R}$*,* $\exists \mathrm{c} \in \mathcal{S}$ *tel que* $(\mathrm{c}, \mathrm{b}) \in \mathcal{R}$*.*

Définition 13 (Ensemble admissible)**.** $\mathcal{S}$ *est dit admissible si et seulement si* $\forall \mathrm{a} \in \mathcal{S}$*,* a *est acceptable par* $\mathcal{S}$*.*

Exemple 3. *Dans l'exemple 2, l'argument* c *est acceptable pour l'ensemble {*a,c*} car il est défendu par* a *contre* b*. L'argument* a *n'étant pas attaqué, l'ensemble {*a,c*} est donc admissible.*

1.3.1.2 Extensions

Dung introduit ensuite diverses sémantiques d'acceptabilité de façon à obtenir un ensemble d'extensions. Une extension est un ensemble d'arguments qui peuvent être acceptés conjointement.

Définition 14 (Extension préférée)**.** *Un ensemble admissible maximal pour l'inclusion d'un système d'argumentation est appelé extension préférée.*

Exemple 4.

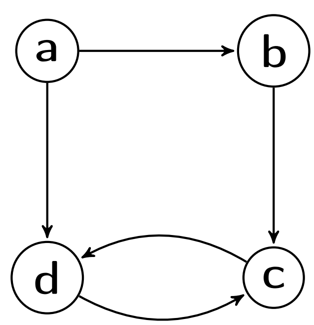

Figure 1.2: Exemple de système d'argumentation

Pour ce système d'argumentation, les ensembles admissibles sont {a} et {a,c}. L'extension préférée est {a,c}.

Propriété 4. *Il existe au moins une extension préférée pour tout système d'argumentation.*

Dung présente ensuite la notion d'extension stable qui coïncide avec d'autres notions déjà existantes : modèles stables en programmation logique, solution stable de jeux à n-joueurs, ...

Définition 15 (Extension stable)**.** *Un ensemble d'arguments $\mathcal{S}$ sans conflit est une extension stable si et seulement si* $\forall \mathrm{b} \notin \mathcal{S}, \exists \mathrm{a} \in \mathcal{S}$ *tel que* $(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \in \mathcal{R}$.

Propriété 5. *Tout extension stable est préférée, la réciproque est fausse.*

Exemple 5. *Dans le système d'argumentation de l'exemple 4, {* a,c *} est une extension stable car elle est sans conflit et attaque {* b,d *}.*

Définition 16 (Extension complète)**.** *Un ensemble d'arguments $\mathcal{S}$ admissible est une extension complète si et seulement si tout argument acceptable pour $\mathcal{S}$ appartient à $\mathcal{S}$.*

Les extensions étant introduites, la notion d'arguments acceptés sceptiquement peut alors être mise en place.

Définition 17. *Un argument accepté sceptiquement est un argument qui appartient à toutes les extensions σ du système d'argumentation.*

La notation $Ext_\sigma(G)$ utilisée dans la suite représente les extensions de sémantique σ du graphe G.

1.3.2 Argumentation logique

Divers travaux se sont intéressés à la structure des arguments et aux relations logiques entre eux, par exemple [BDP93], [Cay95]. Dans la suite, nous nous intéressons au cadre de Besnard et Hunter [BH08]. Ce système nécessite une base de connaissance $\mathcal{K}$ qui permet de générer des arguments, qui sont un couple support-conclusion. Les *conflits* entre arguments viennent de relations logiques entre les formules qui composent les arguments.

1.3.2.1 Arguments

Définition 18. *Une sous-base Θ de $\mathcal{K}$ est un support pour une formule α (appelée conclusion) si et seulement si elle satisfait les propriétés suivantes :*

- $\Theta \nvdash \bot$ *(Θ est cohérente),*

- $\Theta \vdash \alpha$,
- $\forall \Theta' \subset \Theta$, $\Theta' \nvdash \alpha$.

Le couple (Θ, α) est appelé argument.

Exemple 6. *Considérons la base de connaissance $\mathcal{K} = \{a, b, \neg a \vee b, b \rightarrow c\}$, il est possible de construire les arguments suivants :*

- $(\{b\}, b)$
- $(\{a, \neg a \vee b, b \rightarrow c\}, c)$
- $(\{\neg a \vee b\}, \neg(a \wedge \neg b))$

Chaque condition de la définition d'un argument à son importance. La première assure que le support de l'argument ne contient pas d'incohérence, par conséquent la conclusion ne peut pas être dérivée à partir d'une incohérence.

La deuxième condition assure un nombre suffisant d'hypothèses dans le support afin d'en dériver la conclusion.

La dernière condition vérifie que seules des informations pertinentes se trouvent dans le support.

Il est également possible de construire un argument à partir d'un autre argument.

1.3.2.2 Comparaison d'arguments

Dans [BH08], Besnard et Hunter ont introduit une comparaison entre arguments. Cette notion appelée *conservativité* traduit l'idée qu'un argument peut-être plus «général» qu'un autre, autrement dit un argument peut implicitement en contenir ou un autre, ou être déduit d'un autre.

Définition 19 (Conservativité)**.** *Un argument (Θ,α) est plus conservatif qu'un argument (Φ,β) si $\Theta \subseteq \Phi$ et $\beta \vdash \alpha$.*

De cette définition est introduite la notion d'argument *strictement plus conservatif*.

Définition 20 (Argument strictement plus conservatif). *Un argument* (Θ,α) *est strictement plus conservatif qu'un argument* (Φ,β) *si* $\Theta \subseteq \Phi$, $\beta \vdash \alpha$ *et* $\alpha \nvdash \beta$ ou $\Phi \nsubseteq \Theta$.

Puisqu'un argument peut être plus général qu'un autre, il se peut également qu'un argument soit équivalent à un autre.

Définition 21 (Equivalence). *Un argument* (Θ,α) *est équivalent à un argument* (Φ,β) *si* $\Theta \equiv \Phi$ *et* $\alpha \equiv \beta$.

Cette notion d'équivalence sert pour la sélection d'arguments pertinents lors de la génération de contre-arguments.

1.3.2.3 Conflit entre arguments

La notion de conflit entre arguments est l'équivalent de celle d'attaque en argumentation abstraite. Cependant, il existe plusieurs formes de conflits, la plus directe étant celle où les supports de deux arguments dérivent à une conclusion contraire.

Définition 22 (Rebuttal). *Un rebuttal d'un argument* (Θ,α) *est un argument* (Φ,β) *tel que* $\beta \leftrightarrow \neg\alpha \vdash \top$.

Une deuxième forme de conflit consiste à invalider le support d'un argument.

Définition 23 (Undercut). *Un undercut d'un argument* (Θ,α) *est un argument* $(\Phi,\neg(\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_n))$ *tel que* $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subseteq \Theta$.

La relation de conflit la plus générale est appelée defeater :

Définition 24 (Defeater). *Un defeater d'un argument* (Θ,α) *est un argument* (Φ,β) *tel que* $\beta \vdash \neg\Theta$.

1.3.2.4 Système d'argumentation associé à une base logique

Besnard et Hunter [BH14] présentent plusieurs façons d'associer un système d'argumentation à une base logique. Nous nous intéresserons aux graphes exhaustifs classiques.

Pour les construire, à partir d'une base de connaissance $\mathcal{K}$ on génère un graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{A}, \mathcal{R})$ où $\mathcal{A}$ représente les arguments obtenus à partir de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ est l'ensemble de tous les conflits générés par la relation *defeater*.

Comme le montre l'exemple ci-dessous, cette définition permet de construire des graphes infinis.

Exemple 7. *Un exemple de graphe infini.*

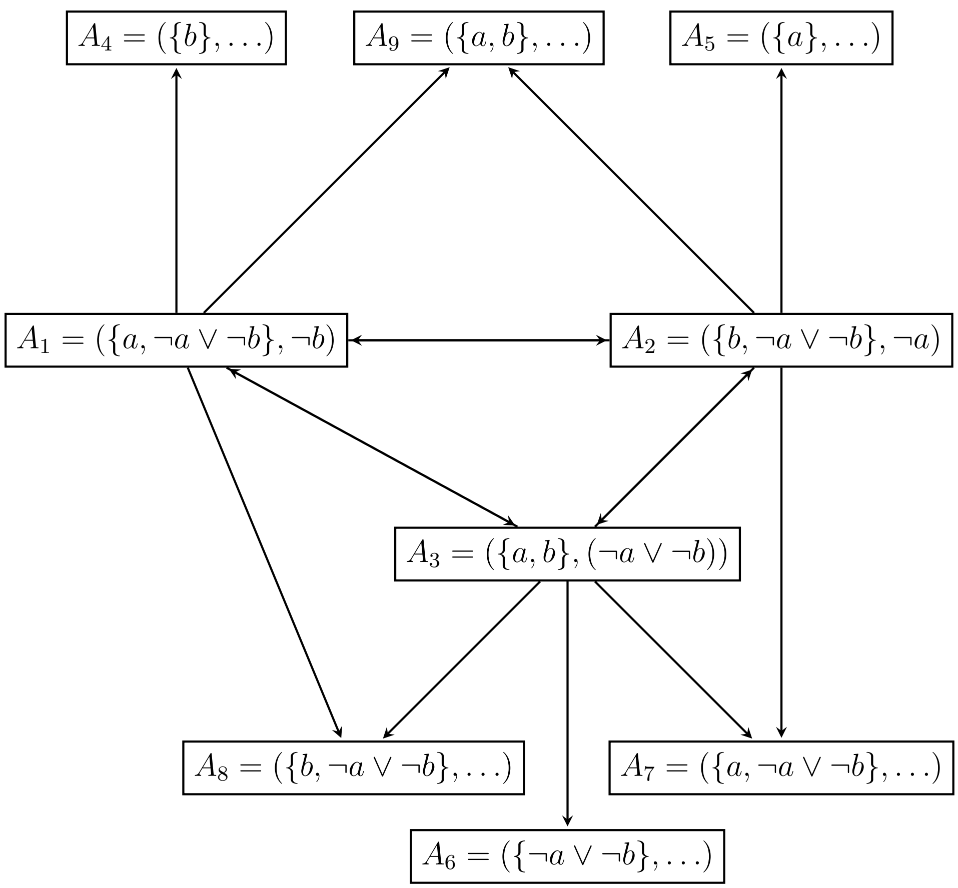

Figure 1.3: $\mathcal{K} = \{a, b, \neg a \vee \neg b\}$

Il est cependant possible de représenter une version finie de ce graphe comme montré dans l'exemple suivant.

Exemple 8. *Soit l'exemple suivant représentant une version finie de l'exemple 7.*

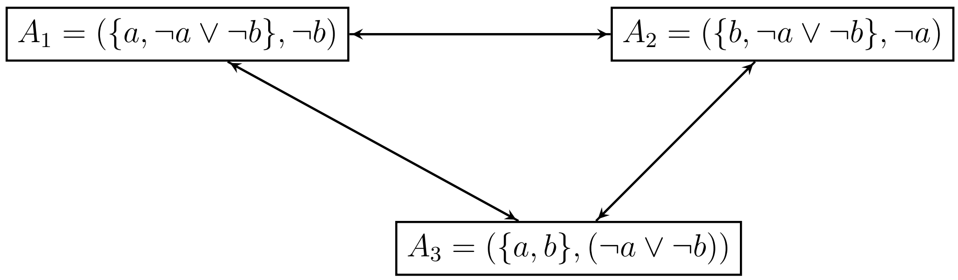

Figure 1.4: $\mathcal{K} = \{a, b, \neg a \vee \neg b\}$

De manière générale, on réduit tous les arguments équivalents à un unique représentant de classe d'équivalence.

Définition 25. *Deux arguments $\mathcal{A}_i$ et $\mathcal{A}_j$ sont équivalents si les conditions suivantes sont satisfaites :*

- *si $\mathcal{A}_k$ attaque $\mathcal{A}_i$, alors $\mathcal{A}_k$ attaque $\mathcal{A}_j$,*
- *si $\mathcal{A}_k$ attaque $\mathcal{A}_j$, alors $\mathcal{A}_k$ attaque $\mathcal{A}_i$,*
- *si $\mathcal{A}_i$ attaque $\mathcal{A}_k$, alors $\mathcal{A}_j$ attaque $\mathcal{A}_k$,*
- *si $\mathcal{A}_j$ attaque $\mathcal{A}_k$, alors $\mathcal{A}_i$ attaque $\mathcal{A}_k$.*

Dans la suite, nous appelons le système d'argumentation $AF(\mathcal{K})$ construit de cette manière le *système d'argumentation associé à $\mathcal{K}$.*

Dans le cas d'un système construit à partir d'une base logique, la sémantique stable admet au moins une extension, contrairement au cas abstrait. [VvdT12]

Toutes ces notions ayant été introduites, nous pouvons mettre en place de nouvelles mesures d'incohérence qui se basent sur l'argumentation.

Chapitre 2

Mesure d'incohérence à base d'argumentation

Nous allons maintenant introduire les nouvelles mesures d'incohérence étudiées et présenter les propriétés que ces mesures satisfont (ou non).

2.1 Mesure d'incohérence par nombre d'attaque

La première mesure d'incohérence est basée sur le nombre d'attaque présent dans le système d'argumentation. Elle se traduit de la manière suivante :

Définition 26. *Soit $\mathcal{K}$ une base de connaissance, $\mathcal{R}$ l'ensemble d'attaques du système d'argumentation associé à $\mathcal{K}$. On définit $\mathbf{I}_1(\mathcal{K}) = |\mathcal{R}|$ avec $|X|$ la cardinalité de l'ensemble X.*

A partir de celle-ci on peut également en dériver deux autres :

Définition 27. *Soit $\mathcal{K}$ une base de connaissance, $\mathcal{R}$ l'ensemble d'attaques du système d'argumentation associé à $\mathcal{K}$, $\mathcal{A}$ l'ensemble d'arguments du système d'argumentation associé à $\mathcal{K}$. On définit $\mathbf{I}_1^A(\mathcal{K}) = \frac{|\mathcal{R}|}{|\mathcal{A}|}$.*

Définition 28. *Soit $\mathcal{K}$ une base de connaissance, $\mathcal{R}$ l'ensemble d'attaques du système d'argumentation associé à $\mathcal{K}$. On définit $\mathbf{I}_1^K(\mathcal{K}) = \frac{|\mathcal{R}|}{|\mathcal{K}|}$.*

Ces deux nouvelles mesures ont la même intuition que l'initiale, seulement elles sont pondérées. Dans le cas de $\mathbf{I}_1^A(\mathcal{K})$, le nombre d'arguments du système d'argumentation est pris en compte, tandis que pour $\mathbf{I}_1^K(\mathcal{K})$, il s'agit du nombre de formules dans la base de connaissance.

2.1.1 Cohérence nulle

Commençons par nous intéresser à $\mathbf{I}_1(\mathcal{K}) = |\mathcal{R}|$ pour le postulat HK1.

Proposition 1. $\mathbf{I}_1(\mathcal{K})$ *satisfait HK1.*

Preuve 1. $|\mathcal{R}|$ *est le nombre d'attaques dans le système.* $\mathbf{I}_1(\mathcal{K}) = 0$ *si et seulement si* $|\mathcal{R}| = 0$. *De plus* $|\mathcal{R}| = 0$ *si et seulement si* $\mathcal{K} \nvdash \perp$.

Le même raisonnement peut être appliqué pour $\mathbf{I}_1^A(\mathcal{K})$ et $\mathbf{I}_1^K(\mathcal{K})$.

Proposition 2. $\mathbf{I}_1^A(\mathcal{K})$ *et* $\mathbf{I}_1^K(\mathcal{K})$ *satisfont HK1.*

Preuve 2. $\mathbf{I}_1^A(\mathcal{K}) = 0$ *si et seulement si* $|\mathcal{R}| = 0$ *sinon* $\mathbf{I}_1^A(\mathcal{K}) > 0$. *La même preuve est appliquée pour* $\mathbf{I}_1^K(\mathcal{K})$.

2.1.2 Monotonie

Dans un premier temps, regardons $\mathbf{I}_1(\mathcal{K})$

Note 1. $\mathcal{A}$*' et* $\mathcal{R}$*' représentent respectivement les arguments et les attaques du système d'argumentation associé à la base* $\mathcal{K}$*'. De même avec* $\mathbb{A}$ *et* $\mathbb{R}$ *pour le système d'argumentation associé à la base* $\mathcal{K} \cup \mathcal{K}'$ *notée* $\mathbb{K}$.

Proposition 3. $\mathbf{I}_1(\mathcal{K})$ *satisfait HK2.*

Preuve 3. $|\mathcal{R}|$ *est le nombre d'attaques du système d'argumentation. L'union de deux bases revient simplement à ajouter les formules de la deuxième base dans première (si cette dernière ne les contient pas déjà).* $\mathbb{A}$ *du nouveau système contient alors les arguments de la première base plus éventuellement de nouveaux apportés par la deuxième, de même pour* $\mathbb{R}$. $|\mathbb{A}|$ *et* $|\mathbb{R}|$ *ne peuvent donc qu'augmenter ou rester égaux .*

Ce postulat étant satisfait par $\mathbf{I}_1(\mathcal{K})$, il est possible d'établir un contre-exemple pour $\mathbf{I}_1^A(\mathcal{K})$ et $\mathbf{I}_1^K(\mathcal{K})$.

Exemple 9. *Soit l'exemple suivant pour la monotonie.*

$$\boxed{A_2 = (\{\neg a \wedge b\}, \neg a \wedge b)} \longleftrightarrow \boxed{A_1 = (\{a \wedge b\}, a \wedge b)}$$

Figure 2.1: $\mathcal{K} = \{a \wedge b, \neg a \wedge b\}$

$\mathcal{K}' = \{b\}$

$$\boxed{A_2 = (\{\neg a \wedge b\}, \neg a \wedge b)} \longleftrightarrow \boxed{A_1 = (\{a \wedge b\}, a \wedge b)}$$

$$\boxed{A_3 = (\{b\}, b)}$$

Figure 2.2: $\mathbb{K} = \{a \wedge b, \neg a \wedge b, b\}$

Proposition 4. $\mathbf{I}_1^A(\mathcal{K})$ *et* $\mathbf{I}_1^K(\mathcal{K})$ *ne satisfont pas HK2.*

Preuve 4. *Dans l'exemple 9,* $|\mathcal{R}| = |\mathcal{A}| = 2$ *et* $|\mathbb{R}| = 2$*,* $|\mathbb{A}| = 3$ *donc* $\mathbf{I}_1^A(\mathcal{K}) = 1 > \mathbf{I}_1^A(\mathbb{K}) = 2/3$ *ce qui ne satisfait pas la monotonie. De la même manière, il s'agit d'un contre exemple à l'encontre de* $\mathbf{I}_1^K(\mathcal{K})$

2.1.3 Indépendance de formules libres

Exemple 10. $$\boxed{A_2 = (\{\neg a\}, \neg a)} \longleftrightarrow \boxed{A_1 = (\{a\}, a)}$$

Figure 2.3: $\mathcal{K} = \{a, \neg a\}$

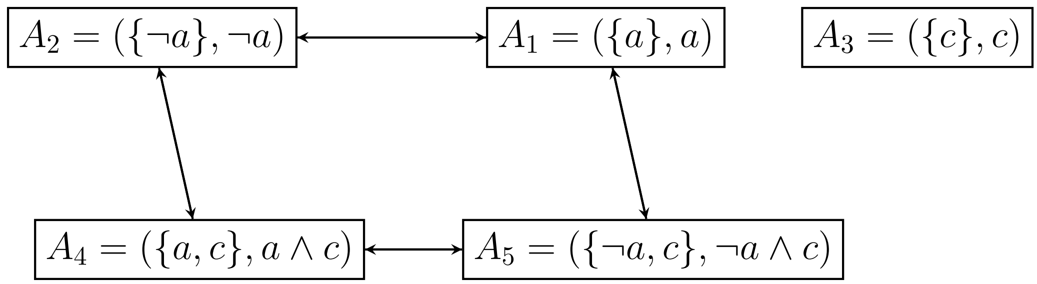

Figure 2.4: $\mathcal{K}' = \{a, \neg a, c\}$

Dans cet exemple, $\alpha = \{c\}$ est une formule libre pour la base $\mathcal{K}$ puisque cette formule n'est pas en contradiction avec les sous-ensembles cohérents de $\mathcal{K}$.

Proposition 5. *$\mathbf{I}_1(\mathcal{K})$, $\mathbf{I}_1^A(\mathcal{K})$ et $\mathbf{I}_1^K(\mathcal{K})$ ne satisfont pas HK3.*

Preuve 5. *$\mathbf{I}_1(\mathcal{K}) < \mathbf{I}_1(\mathcal{K}')$ puisque $2 < 8$. De plus, $\mathbf{I}_1^A(\mathcal{K}) < \mathbf{I}_1^A(\mathcal{K}')$ ($1 < 8/5$) et $\mathbf{I}_1^K(\mathcal{K}) < \mathbf{I}_1^K(\mathcal{K}')$ ($1 < 8/3$).*

2.1.4 Dominance

Exemple 11. $\mathcal{K} = \{a, b \wedge c\}$, $\alpha = \{\neg a\}$, $\beta = \{\neg a \vee \neg b \vee \neg c\}$

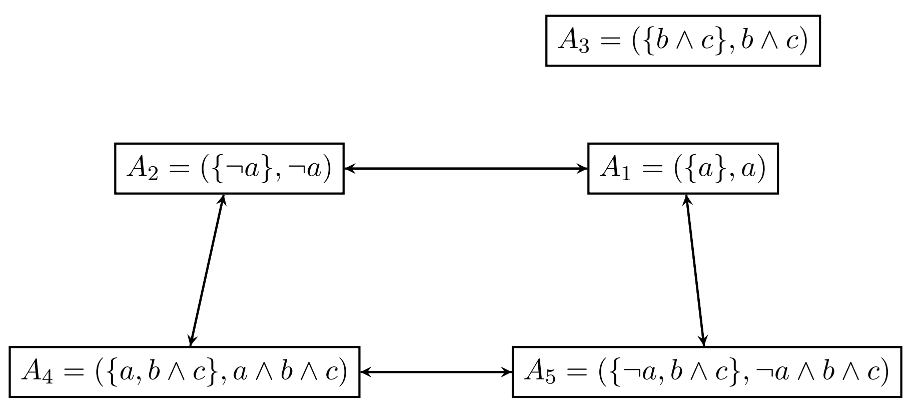

Figure 2.5: $\mathcal{K} \cup \{\alpha\} = \{a, \neg a, b \wedge c\}$

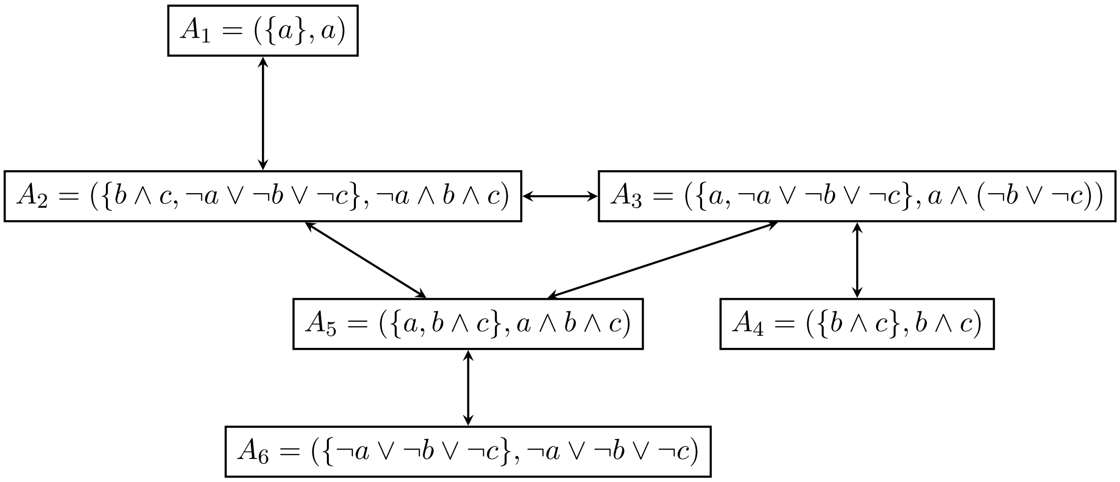

Figure 2.6: $\mathcal{K} \cup \{\beta\} = \{a, b \wedge c, \neg a \vee \neg b \vee \neg c\}$

Proposition 6. *$\mathbf{I}_1(\mathcal{K})$, $\mathbf{I}_1^A(\mathcal{K})$ et $\mathbf{I}_1^K(\mathcal{K})$ ne satisfont pas HK4.*

Preuve 6. *$\mathbf{I}_1(\mathcal{K} \cup \{\alpha\}) < \mathbf{I}_1(\mathcal{K} \cup \{\beta\})$ ($8 < 12$). Il en est de même pour $\mathbf{I}_1^A(\mathcal{K} \cup \{\alpha\}) < \mathbf{I}_1^A(\mathcal{K} \cup \{\beta\})$ ($8/5 < 2$) et pour $\mathbf{I}_1^K(\mathcal{K} \cup \{\alpha\}) < \mathbf{I}_1^K(\mathcal{K} \cup \{\beta\})$ ($8/3 < 4$).*

De ces trois mesures, la première satisfait la cohérence nulle et la monotonie tandis que les deux autres issues de celle-ci ne satisfont que la monotonie.

2.2 Mesure d'incohérence par voisinage

La seconde mesure d'incohérence s'intéresse au nombre de voisins de chaque argument dans le graphe, tout en leur attribuant un poids. Elle se calcule de la manière suivante :

Définition 29. *Soit $\mathcal{K}$ une base de connaissance. On définit : $\mathbf{I}_2(\mathcal{K}) = \overrightarrow{n}.\overrightarrow{w}$ avec*

- $\overrightarrow{w} = (n, n-1, ..., 1)$, $n = |\mathcal{A}|$
- $\overrightarrow{n} = sort(|neigh(a_i)|)$

$\overrightarrow{w}$ est donc le vecteur attribuant le poids en fonction du nombre d'arguments tandis que $\overrightarrow{n}$ est le vecteur obtenu à partir du nombre de voisins de chaque argument (trié par ordre décroissant).

Nous introduisons aussi les deux mesures suivantes qui sont variations de la précédente :

Définition 30. *Soit $\mathcal{K}$ une base de connaissance, $\mathcal{A}$ l'ensemble des arguments du système d'argumentation associé à $\mathcal{K}$. On définit $\mathbf{I}_2^A(\mathcal{K}) = \frac{\mathbf{I}_2(\mathcal{K})}{|\mathcal{A}|}$.*

Définition 31. *Soit $\mathcal{K}$ une base de connaissance. On définit $\mathbf{I}_2^K(\mathcal{K}) = \frac{\mathbf{I}_2(\mathcal{K})}{|\mathcal{K}|}$.*

2.2.1 Cohérence nulle

Dans un premier temps, regardons si $\mathbf{I}_2(\mathcal{K})$ satisfait la cohérence nulle.

Proposition 7. *$\mathbf{I}_2(\mathcal{K})$ satisfait HK1.*

Preuve 7. *Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est issu de la fonction $|neigh(a_i)|$. Cette fonction correspond au nombre de paires d'arguments $(a_i, a_j) \in \mathcal{R}$ ce qui signifie que $\mathbf{I}_2(\mathcal{K}) = 0$ si et seulement si $|\mathcal{R}| = 0$. Or $|\mathcal{R}| = 0$ si et seulement si $\mathcal{K} \nvdash \bot$.*

A partir de cette preuve, on peut déduire celle pour $\mathbf{I}_2^A(\mathcal{K})$ et $\mathbf{I}_2^K(\mathcal{K})$.

Proposition 8. *$\mathbf{I}_2^A(\mathcal{K})$ et $\mathbf{I}_2^K(\mathcal{K})$ satisfont HK1.*

Preuve 8. *$\mathbf{I}_2^A(\mathcal{K})$ et $\mathbf{I}_2^K(\mathcal{K})$ ne sont que des divisions de $\mathbf{I}_2(\mathcal{K})$, la preuve précédente est donc réappliquée.*

2.2.2 Monotonie

En s'appuyant sur la preuve de la cohérence nulle pour $\mathbf{I}_2(\mathcal{K})$, on peut déduire celle de la monotonie.

Proposition 9. *$\mathbf{I}_2(\mathcal{K})$ satisfait HK2.*

Preuve 9. *Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est directement dépendant de $|\mathcal{R}|$ comme montré si précédemment. De plus $|\mathcal{R}|$ ne peut diminuer, donc $\mathbf{I}_2(\mathcal{K} \cup \mathcal{K}') \geq \mathbf{I}_2(\mathcal{K})$.*

$\mathbf{I}_2^A(\mathcal{K})$ et $\mathbf{I}_2^K(\mathcal{K})$ satisfont également la monotonie.

Proposition 10. *$\mathbf{I}_2^A(\mathcal{K})$ et $\mathbf{I}_2^K(\mathcal{K})$ satisfont HK2.*

Preuve 10. *Si une formule ou un argument sont ajoutés, $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{w}$ augmente exponentiellement, ce qui n'est pas le cas de $|\mathcal{R}|$ ou $|\mathcal{A}|$. Dans ce cas, $\mathbf{I}_2^A(\mathcal{K}) < \mathbf{I}_2^A(\mathbb{K})$ et $\mathbf{I}_2^K(\mathcal{K}) < \mathbf{I}_2^K(\mathbb{K})$.*

2.2.3 Indépendance de formules libres

L'exemple 10 permet de montrer que $\mathbf{I}_2(\mathcal{K})$ ne satisfait pas l'indépendance de formules libres.

Proposition 11. *$\mathbf{I}_2(\mathcal{K})$ ne satisfait pas HK3.*

Preuve 11. *En effet, $\mathbf{I}_2(\mathcal{K}) < \mathbf{I}_2(\mathcal{K}')$ ($3[\overrightarrow{A2} * 2 + \overrightarrow{A1} * 1] < 28[\overrightarrow{A1} * 2 + \overrightarrow{A2} * 2 + \overrightarrow{A4} * 2 + \overrightarrow{A5} * 2 + \overrightarrow{A3} * 0]$).*

Proposition 12. *$\mathbf{I}_2^A(\mathcal{K})$ et $\mathbf{I}_2^K(\mathcal{K})$ ne satisfont pas HK3.*

Preuve 12. *$\mathbf{I}_2^A(\mathcal{K})$ et $\mathbf{I}_2^K(\mathcal{K})$ étant des divisions de $\mathbf{I}_2(\mathcal{K})$, la relation d'infériorité est conservée.*

2.2.4 Dominance

Les graphes de l'exemple 11 montre que les trois mesures ne satisfont pas la dominance.

Proposition 13. *$\mathbf{I}_2(\mathcal{K})$, $\mathbf{I}_2^A(\mathcal{K})$ et $\mathbf{I}_2^K(\mathcal{K})$ ne satisfont pas HK4.*

Preuve 13. *$\mathbf{I}_2(\mathcal{K} \cup \{\alpha\}) < \mathbf{I}_2(\mathcal{K} \cup \{\beta\})$ ($28[\overrightarrow{A1} * 2 + \overrightarrow{A2} * 2 + \overrightarrow{A4} * 2 + \overrightarrow{A5} * 2 + \overrightarrow{A3} * 0] < 51[\overrightarrow{A2} * 3 + \overrightarrow{A3} * 3 + \overrightarrow{A5} * 3 + \overrightarrow{A1} + \overrightarrow{A4} + \overrightarrow{A6}]$).*

Ces trois mesures satisfont la cohérence nulle et la monotonie mais ne satisfont pas l'indépendance de formules libres et la dominance.

2.3 Mesure d'incohérence par nombre d'extension

La troisième mesure d'incohérence s'intéresse au nombre d'extensions du système d'argumentation. Elle est définit comme suit :

Définition 32. *Soit $\mathcal{K}$ une base de connaissance, $\mathcal{R}$ l'ensemble des attaques du système d'argumentation associé à $\mathcal{K}$, $|Ext_\sigma(AF_(\mathcal{K}))|$ les extensions du système d'argumentation associé à $\mathcal{K}$.*

On définit $\mathbf{I}_3^\sigma(\mathcal{K}) = \begin{cases} 0 \ if \ |\mathcal{R}| = 0 \\ |Ext_\sigma(AF_{atts}(\mathcal{K}))| \end{cases}$ avec σ représentant les extensions préférées, complètes et stables.

2.3.1 Cohérence nulle

Proposition 14. $\mathbf{I}_3^{\sigma}(\mathcal{K})$ *satisfait HK1.*

Preuve 14. $\mathbf{I}_3^{\sigma}(\mathcal{K}) = 0$ *si* $|\mathcal{R}| = 0$. *De plus tout système d'argumentation possède au moins une extension* σ (voir [Dun95]) *ce qui signifie que* $\mathbf{I}_3^{\sigma}(\mathcal{K}) > 0$ *si* $|\mathcal{R}| > 0$. *Les extensions préférées et complètes satisfont donc la cohérence nulle.*

2.3.2 Indépendance de formules libres

Ce postulat est satisfait par les extensions préférées, complètes et stables.

Proposition 15. $\mathbf{I}_3^{\sigma}(\mathcal{K})$ *satisfait HK3.*

Preuve 15. *Cas* $|\mathcal{R}| = 0$ *: Si* $\mathcal{K} \nvdash \perp$ *et* α *est libre pour* $\mathcal{K}$ *alors* $\mathcal{K} \cup \{\alpha\} \nvdash \perp$

Cas $|Ext_{\sigma}(AF_{atts}(\mathcal{K}))|$ *:* α *une formule libre pour une base* $\mathcal{K}$*, les nouveaux arguments produits par l'ajout de la formule dans la base auront les mêmes relations d'attaques que les arguments sans* α *dans le support (les arguments sans* α *attaquant également ceux le contenant) ce qui signifie que le nombre d'extensions reste identique malgré que celles-ci contiennent plus d'arguments. La même intuition est appliquée pour les systèmes d'argumentation sans extensions, les arguments avec* α *attaquent / se font attaquer de la même manière que ceux sans* α *ce qui ne produit donc pas de nouvelle extension.*

2.3.3 Dominance

L'exemple 11 montre qu'aucune extension (préférée, complète ou stable) ne satisfait la dominance.

Proposition 16. $\mathbf{I}_3^{\sigma}(\mathcal{K})$ *ne satisfait pas HK4.*

Preuve 16. $\mathbf{I}_3(\mathcal{K} \cup \{\alpha\})$ *[*$\{A1, A3, A4\}, \{A2, A4, A5\}$*]* $<$ $\mathbf{I}_3(\mathcal{K} \cup \{\beta\})$ *[*$\{A1, A3, A6\}$*,* $\{A1, A4, A5\}$*,* $\{A1, A4, A6\}$*,* $\{A2, A4, A6\}$*] (*$2 < 4$*).*

Cette mesure satisfait la monotonie et l'indépendance des formules libres, de plus les extensions préférées et complètes satisfont la cohérence nulle.

2.4 Mesure d'incohérence par nombre d'arguments acceptés sceptiquement

Cette quatrième mesure d'incohérence est basée sur le nombre d'arguments acceptés sceptiquement. Elle se calcule comme ceci :

Définition 33. *Soit $\mathcal{K}$ une base de connaissance, $\mathcal{A}$ l'ensemble des arguments du système d'argumentation associé à $\mathcal{K}$, $|\cap Ext_\sigma(AF_{atts}(\mathcal{K}))|$ le nombre d'arguments acceptés sceptiquement.*

On définit $\mathbf{I}_4^\sigma(\mathcal{K}) = \left|\frac{|\cap Ext_\sigma(AF_{atts}(\mathcal{K}))|}{|\mathcal{A}|} - 1\right|$.

Cette mesure vaut donc 0 quand tous les arguments sont des arguments acceptés sceptiquement, et 1 quand aucun argument n'est accepté sceptiquement.

2.4.1 Arguments acceptés sceptiquement et cohérence nulle

Proposition 17. $\mathbf{I}_4^\sigma(\mathcal{K})$ *satisfait HK1.*

Preuve 17. *Si $|\mathcal{R}| = 0$ alors le système d'argumentation ne possède qu'une extension σ contenant tous les arguments, auquel cas $\mathbf{I}_4^\sigma(\mathcal{K}) = \left|\frac{|\mathcal{A}|}{|\mathcal{A}|} - 1\right| = 0$. Sinon le système d'argumentation possède plusieurs extensions σ où tous les arguments ne sont pas acceptés sceptiquement (chaque extension diffère des autres) auquel cas $\mathbf{I}_4^\sigma(\mathcal{K}) >= 0$ car $|\cap Ext_\sigma(AF_{atts}(\mathcal{K}))| \neq |\mathcal{A}|$.*

2.4.2 Monotonie

Exemple 12. $\mathcal{K} = \{a, \neg a\}$ *et* $\mathcal{K}' = \{b\}$.

$$\boxed{A_2 = (\{\neg a\}, \neg a)} \longleftrightarrow \boxed{A_1 = (\{a\}, a)}$$

Figure 2.7: $\mathcal{K} = \{a, \neg a\}$

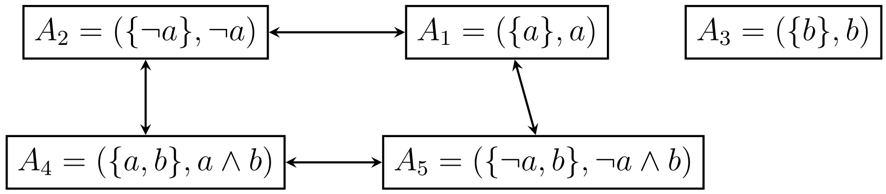

Figure 2.8: $\mathbb{K} = \{a, \neg a, b\}$

Proposition 18. $\mathbf{I}_4^{\sigma}(\mathcal{K})$ *ne satisfait pas HK2.*

Preuve 18. $\mathbf{I}_4^{\sigma}(\mathcal{K}) = |0/2 - 1| = 1$*(deux extensions : a et $\neg a$).* $\mathbf{I}_4^{\sigma}(\mathbb{K}) = |1/5 - 1| = 0,8$*(deux extensions : $\{A1, A3, A4\}$ et $\{A2, A3, A5\}$).*

2.4.3 Indépendance de formules libres

L'exemple 10 montre que notre mesure ne satisfait pas le postulat HK3.

Proposition 19. $\mathbf{I}_4^{\sigma}(\mathcal{K})$ *ne satisfait pas HK3.*

Preuve 19. $\mathbf{I}_4(\mathcal{K}) > \mathbf{I}_4(\mathcal{K}')$ *(*$1 > 0.8[1 - 1/5]$*)*

2.4.4 Dominance

Proposition 20. $\mathbf{I}_4^{\sigma}(\mathcal{K})$ *ne satisfait pas HK4.*

A partir de l'exemple 11, on observe le contre-exemple suivant :

Preuve 20. $\mathbf{I}_4(\mathcal{K} \cup \{\alpha\}) < \mathbf{I}_4(\mathcal{K} \cup \{\beta\})$ *(*$0,8 < 1$*), ce qui ne satisfait pas la dominance.*

Cette quatrième mesure ne satisfait aucun postulat.

2.5 Synthèse des propriétés de nos mesures d'incohérence

Le tableau suivant récapitule les postulats satisfaits ou non par les différentes mesures.

	HK1	HK2	HK3	HK4
$\mathbf{I}_1(\mathcal{K})$	✓	✓	✗	✗
$\mathbf{I}_1^A(\mathcal{K})$	✓	✗	✗	✗
$\mathbf{I}_1^K(\mathcal{K})$	✓	✗	✗	✗
$\mathbf{I}_2(\mathcal{K})$	✓	✓	✗	✗
$\mathbf{I}_2^A(\mathcal{K})$	✓	✓	✗	✗
$\mathbf{I}_2^K(\mathcal{K})$	✓	✓	✗	✗
$\mathbf{I}_3^\sigma(\mathcal{K})$	✓		✓	✗
$\mathbf{I}_4^\sigma(\mathcal{K})$	✓	✗	✗	✗

Conclusion

Lors de ce TER, nous avons étudié la question des mesures d'incohérences. Les propriétés pour définir de telles mesures existant déjà, nous nous sommes directement intéressés à chercher des mesures pouvant satisfaire ces propriétés. Ainsi nous avons défini des mesures à base d'argumentation et avons étudié leurs propriétés logiques.

De nombreuses perspectives sont ouvertes. Premièrement, on souhaite déterminer si $\mathbf{I}_3^\sigma(\mathcal{K})$ satisfait ou non la monotonie. Ensuite, Besnard [Bes14] fait objection aux postulats « Dominance » et « Indépendance des formules libres » en montrant une faille. Il propose également d'autres postulats pour pallier aux problèmes de ces deux derniers. Il est donc possible que nos mesures satisfassent ces nouveaux postulats.

De plus, il existe d'autres sémantiques que nous n'avons pas étudiées. Il est intéressant de déterminer si les variantes des mesures d'incohérences pour ces sémantiques satisfont les postulats.

Bibliographie

[BDP93] Salem Benferhat, Didier Dubois, and Henri Prade. Argumentative inference in uncertain and inconsistent knowledge bases. In *Proceedings of the Ninth Annual Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence, UAI '93*, pages 411–419, 1993.

[Bes14] Philippe Besnard. Revisiting postulates for inconsistency measures. In *Proceedings of the Fourteenth European Conference on Logics in Artificial Intelligence, JELIA '14*, pages 383–396, 2014.

[BH08] Philippe Besnard and Anthony Hunter. *Elements of Argumentation.* MIT Press, 2008.

[BH14] Philippe Besnard and Anthony Hunter. Constructing argument graphs with deductive arguments: a tutorial. *Argument & Computation*, 5(1):5–30, 2014.

[Cay95] Claudette Cayrol. On the relation between argumentation and non-monotonic coherence-based entailment. In *Proceedings of the Fourteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence, IJCAI 95*, pages 1443–1448, 1995.

[Dun95] Phan Minh Dung. On the acceptability of arguments and its fundamental role in nonmonotonic reasoning, logic programming and n-person games. *Artif. Intell.*, 77(2):321–358, 1995.

[HK05] Anthony Hunter and Sébastien Konieczny. Approaches to measuring inconsistent information. In *Inconsistency Tolerance [result from a Dagstuhl seminar]*, pages 191–236, 2005.

[VvdT12] Srdjan Vesic and Leendert W. N. van der Torre. Beyond maxiconsistent argumentation operators. In *Logics in Artificial Intelli-*

gence - 13th European Conference, JELIA 2012, Toulouse, France, September 26-28, 2012. Proceedings, pages 424–436, 2012.