Université de Paris

Algorithmie Avancée

Mise en Contexte / Mise en Oeuvre

Année 2023-2024 par Prof. Nicolas Loménie
Sur la base du cours de Prof. Etienne Birmelé (2016-2020)

Algorithmie : des maths et du computer science

- mathématicien persan du IXe siècle, Mohammed ibn-Musa al-Khuwarizmi
- logiciens des années 1930 (Herbrand, Gödel, Church et Turing)
- branche de l'informatique qui traite des algorithmes ou économie de l'informatique

Coût d'un algorithme

- Expérimentalement :

  $time java Simulation 1000000

  $13.240u 0.870s 0:19.30 73.1% 0+853k 0+16io 0pf+0w

- Théoriquement *:*

  Execution time = ***instruction count (IC)*** *//nombre d'instructions exécutées du programme*

  x average clock per instruction (CPI) //nombre moyen de cycles par instruction

  x clock time (CT) // durée d'un cycle d'horloge

- IC approximable par l'étude de la compléxité
  - *Mesure de la complexité : 0(n) O(n^2) 0(log n) dépendant seulement du langage source*

https://www.d.umn.edu/~gshute/arch/performance-equation.xhtml

Algorithmie : résolution de problèmes via structures de données

- un entier n ; n est-il premier ? *L'algorithme stochastique de Miller-Rabin*
- un système d'équations linéaires ; le système est-il régulier ? si oui, calculer sa solution. *L'algorithme de triangulation de Gauss*
- un n- uplet de nombres complexes ; calculer la transformée de Fourier discrète de ce n-uplet. *La transformée de Fourier rapide*
- une chaîne de caractères ***s*** ; ***s*** est-elle un programme Java correct ? *L'analyse syntaxique par un automate à pile*
- un ensemble de villes et de routes les reliant, la longueur de ces routes, et deux villes de cet ensemble ; calculer la longueur du chemin le plus court entre ces deux villes. *L'algorithme du plus court chemin de Floyd, par programmation dynamique*
- un ensemble de tâches, leurs durées et leurs contraintes de précédence ; ces tâches sont-elles réalisables ? si oui, calculer leurs dates de réalisation au plus tôt et au plus tard. *Un algorithme glouton d'affectation de tâches*
- un réseau de transport de marchandises, la capacité de chaque route, et un entrepôt ; quelle est la quantité maximale de marchandises que ce réseau peut écouler à partir de l'entrepôt ? *L'algorithme de flot maximum de Ford-Fulkerson*
- comment rétablir le réseau électrique après une tempête en réparant le minimum de lignes électriques ? *L'algorithme glouton d'arbre couvrant minimum de Prim, ou celui de Kruskal*

Algorithmie : résolution de problèmes via structures de données

Pas de livre magique mais des stratégies universelles :

- **la méthode incrémentale** : résoudre un problème P(n) à partir d'une solution de P(n-1) ; une méthode par récurrence, qui peut donner lieu aussi bien à des programmes itératifs qu'à des programmes récursifs ; dans le cas d'un problème d'optimisation, la méthode gloutonne consiste à construire une solution de P(n) en prolongeant une solution de P(n-1) par un choix localement optimal ;
- **la méthode << diviser pour régner >>** : méthode descendante par décomposition en sous-problèmes en transformant un problème P(n) en deux problèmes P(n/2) ;
- **la programmation dynamique** : méthode ascendante, utilisable pour des problèmes d'optimisation, qui consiste à construire la solution d'un problème à partir des solutions de tous les sous-problèmes ; elle s'applique quand toute sous-solution d'une solution optimale est optimale pour le sous-problème correspondant.

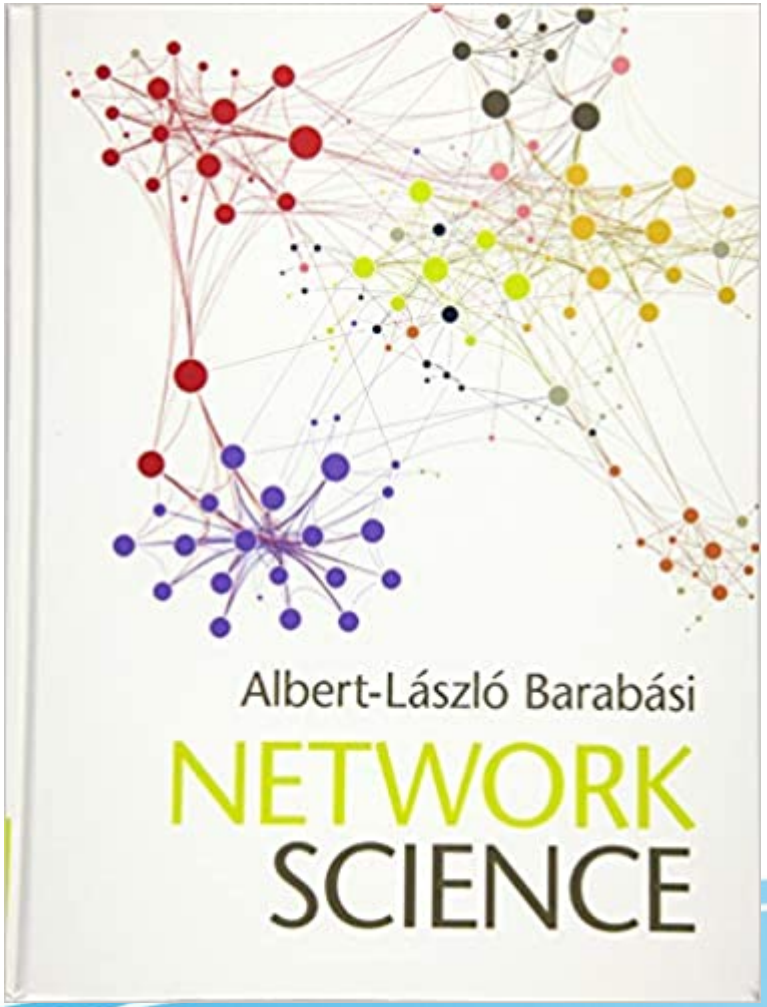
Mais le coeur du problème c'est la **Structure de Données (Data Structure)** : la modélisation du problème (monoïde, graphe, matroïde en math / pile, file, tas, table, arbre en info → math discrète)

Peut-on tout résoudre par un algorithme ? P=NP ? En un temps raisonnable ? Le fameux problème du Voyageur de Commerce

https://www.youtube.com/watch?v=5NJCEDusvB4

Être capable de comprendre et d'analyser un monde interconnecté
De la **théorie des graphes** vers la théorie des réseaux

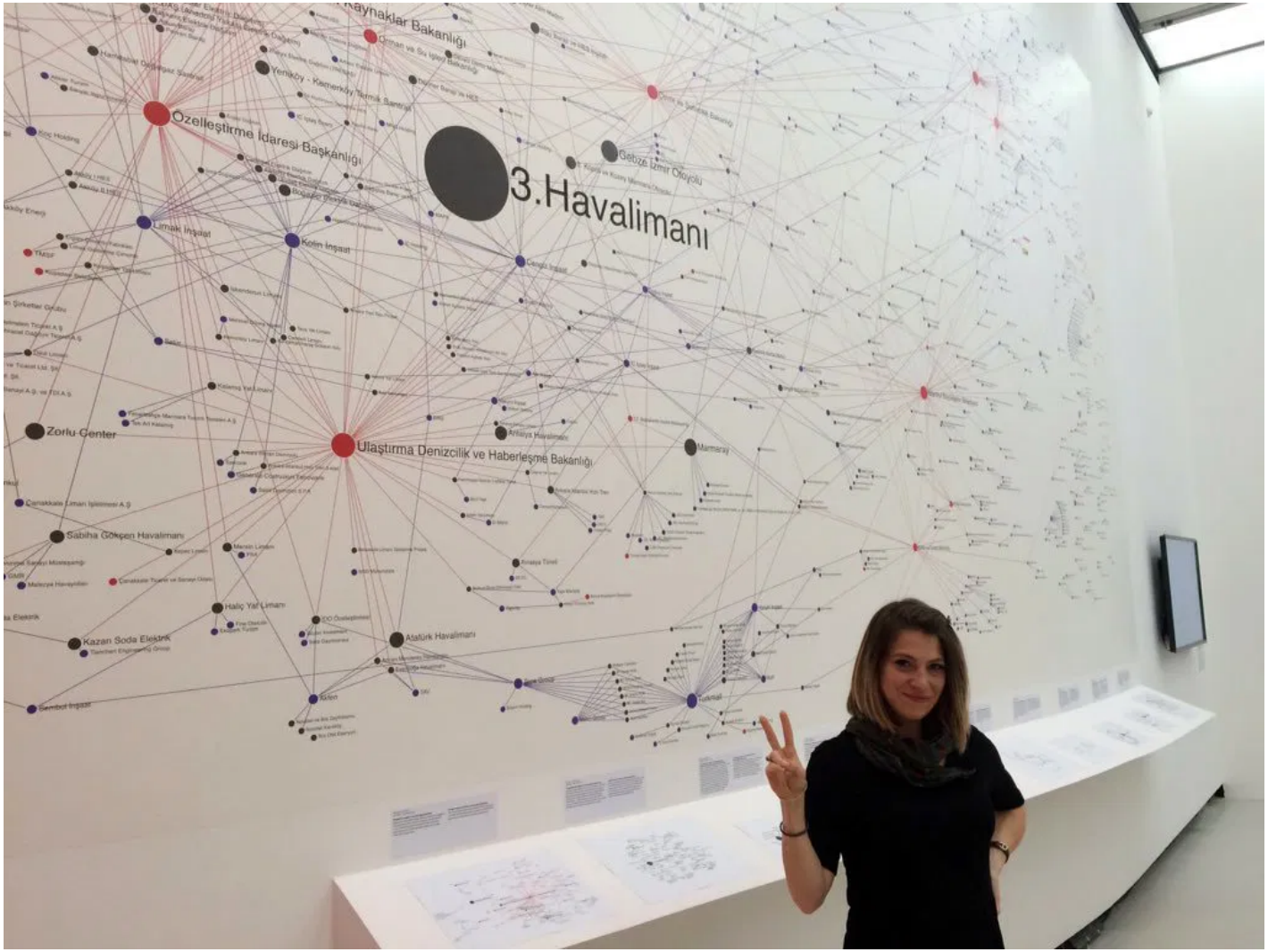
(From Graph Theory to Network Science ; The Network Science by Prof. Albert-László Barabási)



http://networksciencebook.com/

Exploration via la théorie des Graphes/Réseaux

http://graphcommons.com



De la théorie des Graphes

à la Science des réseaux

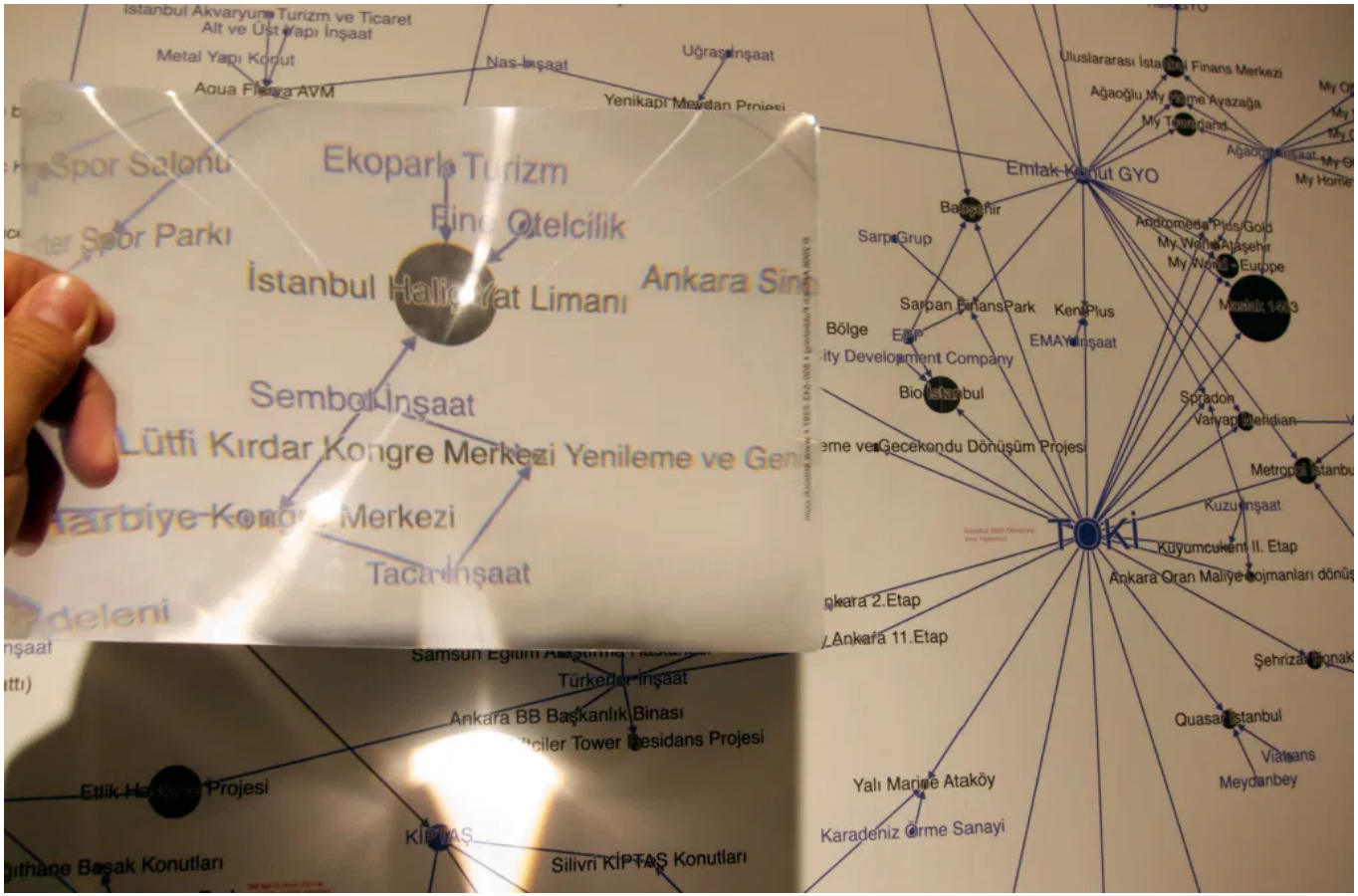
Etude des réseaux **réels** ;
Gephi , Cytoscape, NetworkX

https://burak-arikan.com/networks-of-dispossession/#

https://graphcommons.com/hubs/mulksuzlestirme

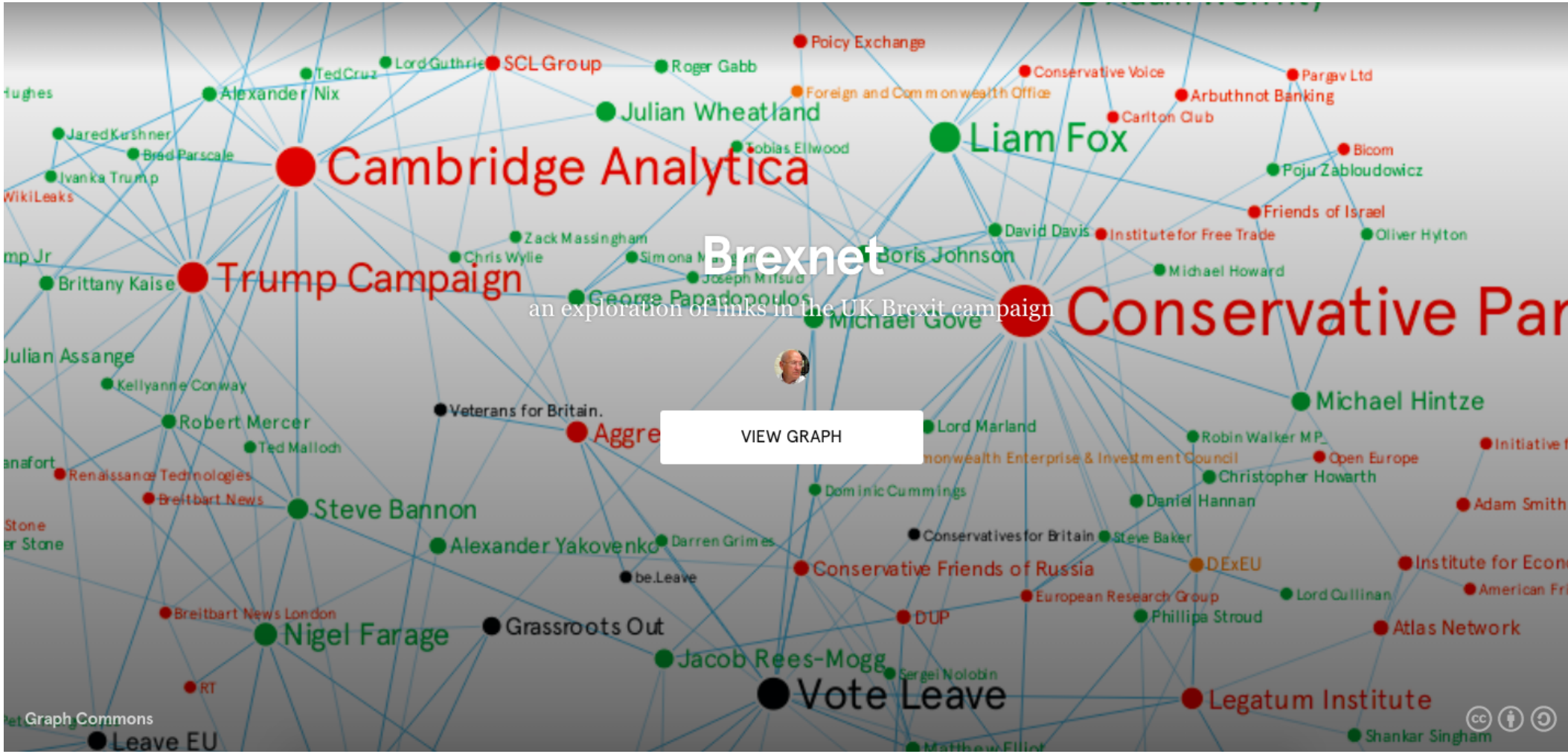
http://mulksuzlestirme.org/turkiye-medya-sahipleri-agi/

Exploration via la théorie des Graphes/Réseaux



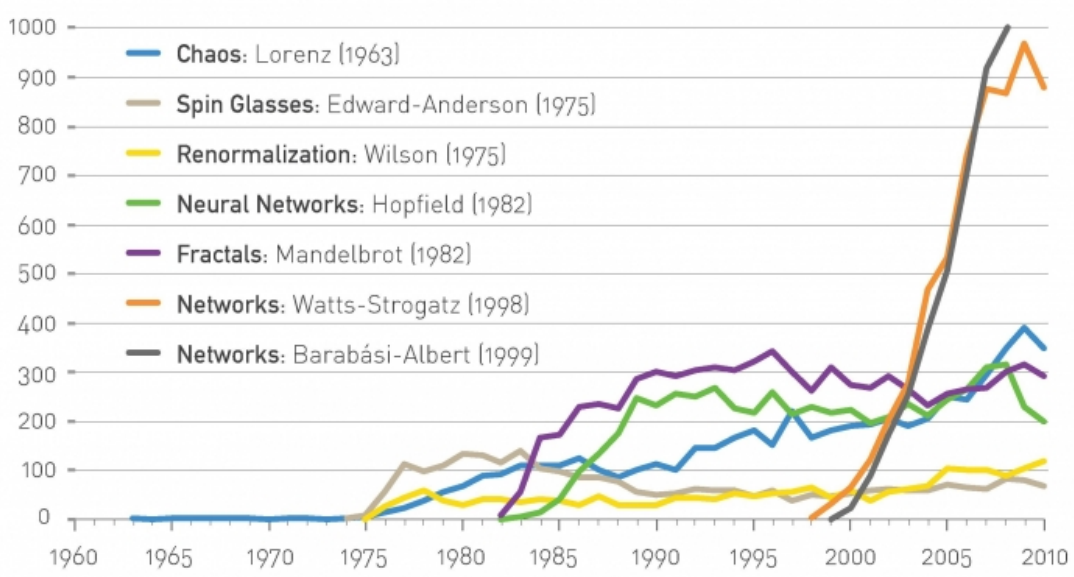
http://www.visualcomplexity.com/

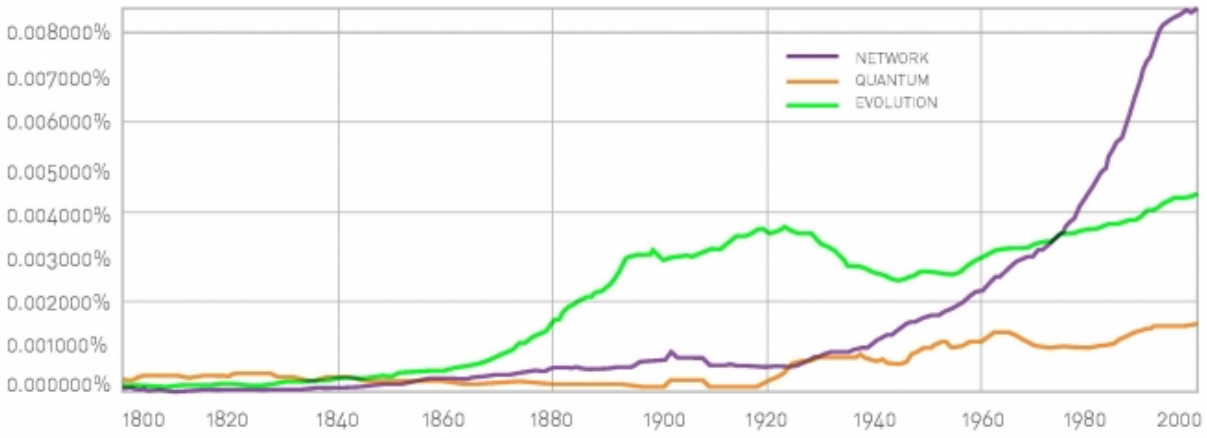
Exploration via la théorie des Graphes/Réseaux



https://climateandsecurity.org/2019/08/army-war-college-the-u-s-military-is-precariously-underprepared-for-climate-change/

Exploration via la théorie des Graphes/Réseaux





Science des Réseaux	Theorie des Graphes
Réseau *Network*	Graphe *Graph*
Noeud *Node*	Sommet *Vertex*
Lien *Link*	Arête *Edge*

Théorie des Graphes 1

- AlgoAvanceeCoursPart1.pdf

  Support de cours

  Planche 1 à 14 (définitions générales)

- Coloration de graphes

Théorie des Graphes 1

Problème classique de coloration de graphes :
On doit stocker 8 produits chimiques p 1 , p 2 ... p 8 mais pour des raisons de sécurité certains produits ne peuvent pas être stockés dans le même hangar :

- p 1 ne peut pas être stocké avec p 4
- p 2 ne peut pas être stocké avec p 3
- p 3 ne peut pas être stocké avec p 2, , p 4 ou p 5
- p 4 ne peut pas être stocké avec p 1, , p 3 ou p 7
- p 5 ne peut pas être stocké avec p 3 ou p 6
- p 6 ne peut pas être stocké avec p 5
- p 7 ne peut pas être stocké avec p 4 ou p 8
- p 8 ne peut pas être stocké avec p 3 ou p 7

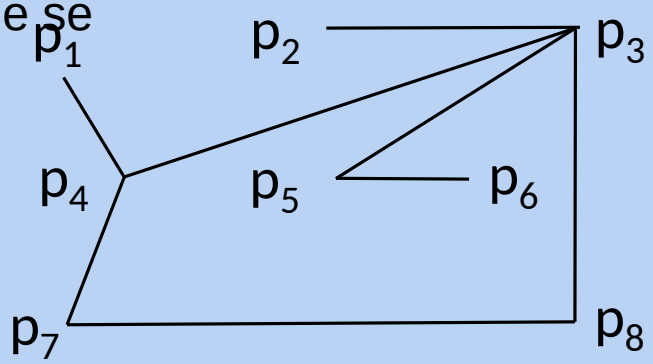
Combien de hangars faut-il et comment y répartir les produits ?

Théorie des Graphes 1

Résolution :
1. Représenter le problème sous-forme de graphe.
Sommets = produits
Relation = « n'est pas compatible avec »
(Deux produits sont adjacents s'ils ne peuvent pas être stockés dans le même hangar.)
La relation est symétrique : graphe non orienté

2. Attribuer un hangar à chaque sommet de telle sorte que 2 sommets/produits reliés par une arête ne se retrouvent pas dans le même hangar.

C'est un problème de **coloration du graphe**.



Théorie des Graphes 1

Étant donné un graphe simple G = (S,A), S ensemble des sommets, A ensemble des arêtes.
Une coloration propre des sommets est une fonction f qui attribue une couleur (valeur) à chaque sommet de sorte que deux sommets adjacents aient des couleurs différentes : $\forall (x, y) \in A, f(x) \neq f(y)$

- Un graphe est k-colorable s' il existe une coloration propre avec k couleurs

- Le nombre minimum de couleurs nécessaires pour obtenir une coloration propre est appelé le nombre chromatique de G et noté $\chi(G)$. C'est le plus petit entier k pour lequel le graphe est k-coloriable.

Théorie des Graphes 1

Problématiques :
1. Etant donné un graphe simple G d'ordre n, comment attribuer une « couleur » (valeur) à chaque sommet de G de telle sorte que deux sommets adjacents n'aient jamais la même couleur ?
2. Etant donné un entier k<n, G est-il k-colorable ?
3. Quel est le nombre chromatique de G ?
4. Peut-on trouver une coloration minimale ?

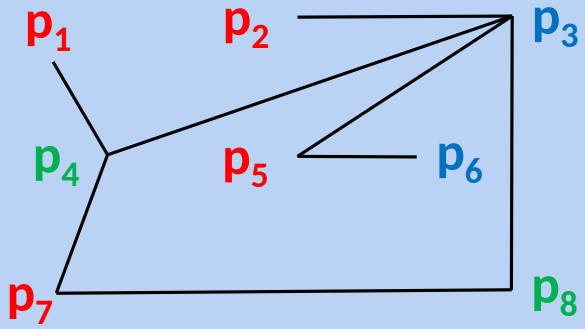
Domaines d'applications :
Cartographie
Planification (réunions, emploi du temps ...)
Transports, stockages (problèmes d'incompatibilité)
Télécommunications : attribution de fréquences
Informatique : allocation de registres

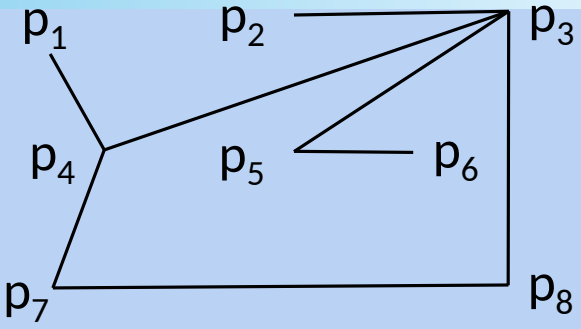
Théorie des Graphes 1

A. Algorithme naïf : coloration séquentielle

− Parcourir les sommets les uns après les autres :

− Attribuer à chaque sommet la « plus petite » couleur non déjà utilisée pour un de ses sommets adjacents.





sommets	couleurs
1	• 1
2	• 1
3	• 2
4	• 3
5	• 1
6	• 2
7	• 1
8	• 3

Si n et m sont respectivement l'ordre (nombre de sommets) et la taille (nombre d'arêtes) du graphe, la complexité de l'algorithme séquentielle est en O(n+m)

C'est un algorithme glouton. La solution obtenue n'est pas forcément optimale et dépend de la numérotation des sommets (de l'ordre de Parcours)

On peut améliorer l'algorithme séquentiel en choisissant un ordre de parcours judicieux → Algorithme de Welsh et Powell

Théorie des Graphes 1

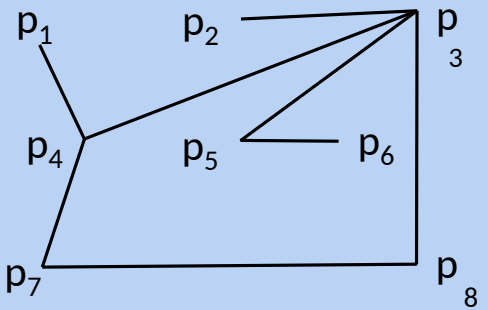
B. Algorithme de Welsh et Powell

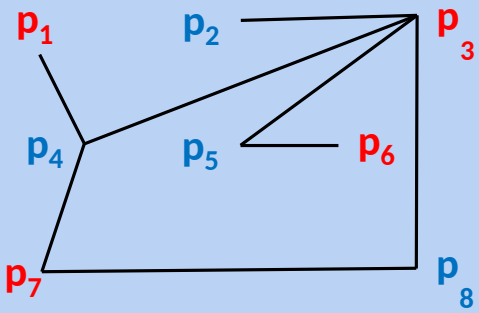
1. Trier la liste des sommets par ordre décroissant de degrés
2. Parcourir la liste triée :

− Trouver le premier sommet non déjà coloré et lui attribuer la « plus petite » couleur c non déjà utilisée.

− Parcourir la suite de la liste en attribuant cette couleur c aux sommets non colorés et non adjacents aux sommets déjà colorés avec c

3. Recommencer en 2 s'il reste des sommets non colorés





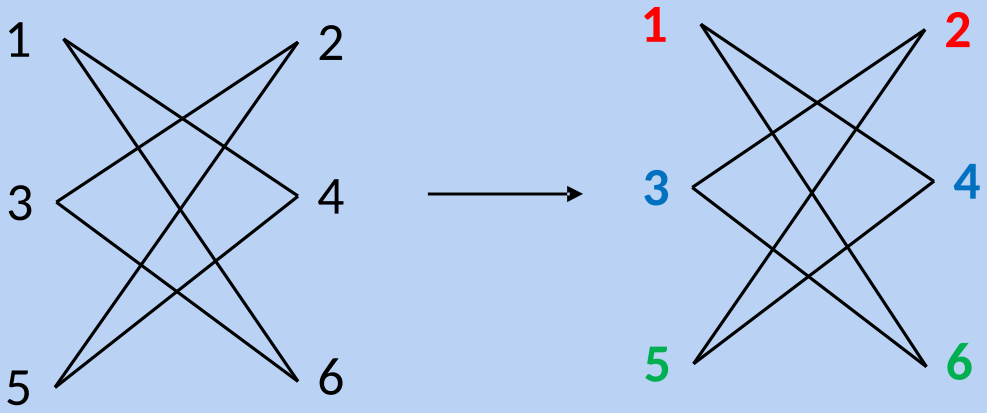
sommets	degrés	t 1	t 2
3	4	• 1	
4	3		• 2
5	2		• 2
7	2	• 1	
8	2		• 2
1	1	• 1	
2	1		• 2
6	1	• 1	

Quelle est l'idée derrière cette stratégie ?
Obtient-on la bonne solution ?
L'algorithme donne-t-il toujours le nombre chromatique ?

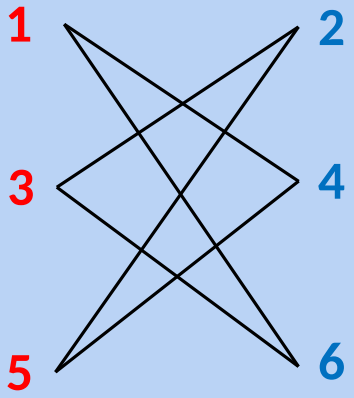
Théorie des Graphes 1

En utilisant un tri par dénombrement, on obtient une complexité de l'ordre de O(n+m).
C'est un algorithme glouton. La solution obtenue n'est pas forcément optimale:

Graphe couronne à 6 sommets



L'algorithme donne 3 couleurs alors que le nombre chromatique est 2



Théorie des Graphes 1

On sait trouver une coloration d'un graphe mais **on ne sait pas résoudre en temps raisonnable les deux questions suivantes :**

- **Déterminer si un graphe est k-colorable**
- **trouver le nombre chromatique d'un graphe quelconque**

Les algorithmes ont une complexité exponentielle (NP-complet et NP-difficile)

On sait encadrer le nombre chromatique :

− Le nombre chromatique d'un graphe G est inférieur à Δ(G), où Δ(G) est le plus grand degré de ses sommets.

− Le nombre chromatique d'un graphe G est supérieur ou égal à l'ordre ω(G) du plus grand sous-graphe complet (ou clique) de G.

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$$

On sait trouver des colorations optimales pour certaines classes particulières de graphes (graphes parfaits par exemple)

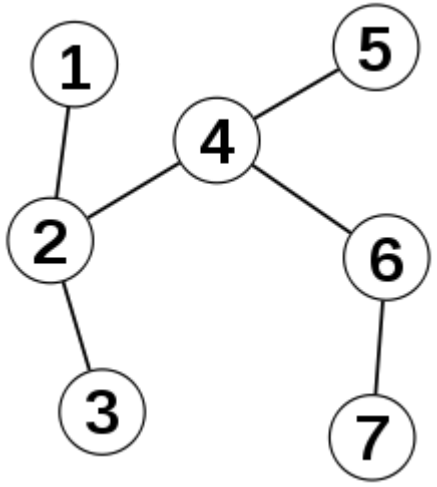
https://fr.wikipedia.org/wiki/Coloration_de_graphe

https://fr.wiktionary.org/wiki/graphe_parfait

Une structure de données simple

```
struct nœud {
    struct *noeud_filsG, *noeud_filsD ;
    int valeur ; // Ou tout autre structure
}
```

Un arbre vs nœud/sommet ? Nœud vs racine / Arbre binaire vs. Arbre générique



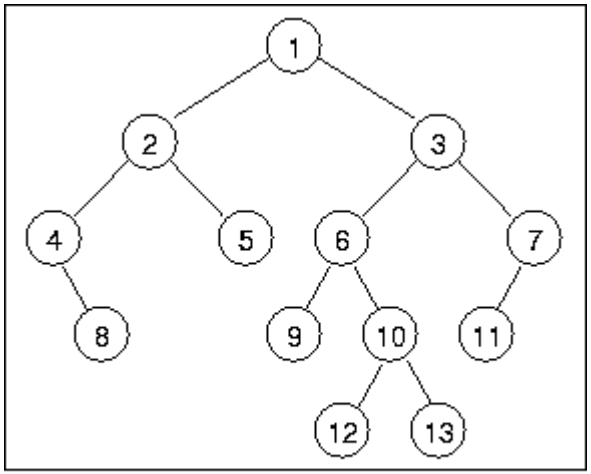


FIG. 2.14 – *Arbre binaire étiqueté.*

https://fr.wikipedia.org/wiki/Arbre_(th%C3%A9orie_des_graphes)

http://cermics.enpc.fr/polys/oap/node72.html

http://emmanuel.adam.free.fr/site/spip.php?article128

Evaluation probable

Contrôle Continu Intégré

Note de session 1 :

Note 1= 0.2*Note A +0.3*Note B + 0.5*Note C

Note A : 1 compte rendu de travail personnel sur les exercices pratiques (TD)

Note B : 1 mini projet (ou super TP) à rendre

Note C : 1 examen final en présentiel obligatoirement

Note de Session 2 :

Note 2= max(Note C, Note 1)

Equipe Pédagogique

- Nicolas Loménie (Prof. Informatique - Ens. Chercheur)

- Gaël Mahé (Prof. Informatique - Ens. Chercheur)

  Annonces 2022-2023 :

  - https://swerc.eu/2021/about/
  - Evénements Circle U. : exemple 2022-2023 https://www.circle-u.eu/opportunities/students/hackathon-series/