Université de Paris

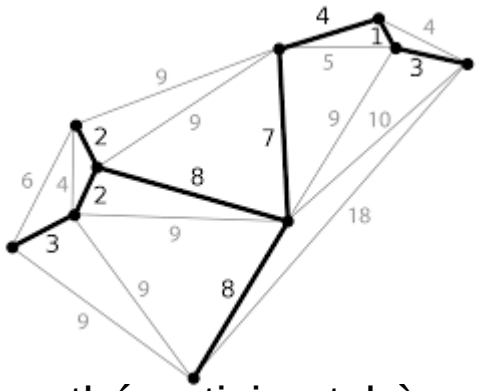
Algorithmie Avancée

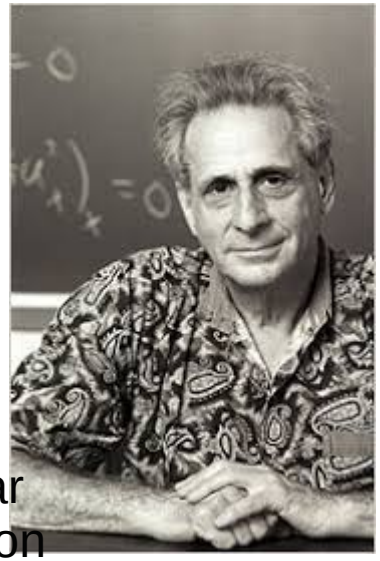
Mise en Contexte / Mise en Oeuvre

Année 2023-2024 par Prof. Nicolas Loménie
Sur la base du cours de Prof. Etienne Birmelé (2016-2020)

Mise en Contexte

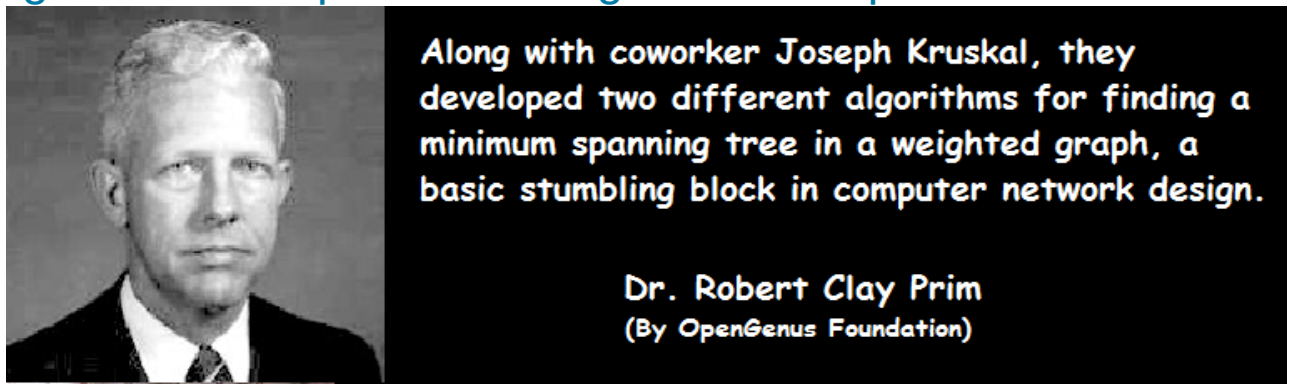
Martin D. Kruskal





Edsker W. Dijkstra (1930-2002)

« Il a été initialement développé en 1930 par le mathématicien tchèque Vojtěch Jarník et plus tard, en 1957, a été développé indépendamment par Robert C. Prim. En 1959, il a été redécouvert par Edsger Dijkstra. En raison des contributions de ces chercheurs il est souvent cité comme algorithme DJP (Dijkstra, Jarnik, Prim), l'algorithme Jarnik ou un algorithme de Prim-Jarnik »
https://boowiki.info/art/les-algorithmes-d-optimisation/algorithme-de-prim.html

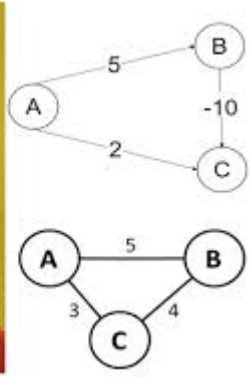


https://www.nytimes.com/2007/01/13/obituaries/13kruskal.html
https://fr.wikipedia.org/wiki/Programmation_dynamique

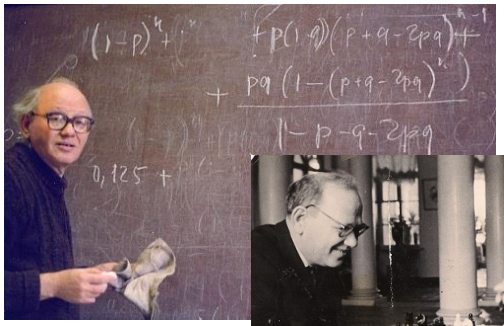
Un peu d'histoire des algorithmes et des hommes

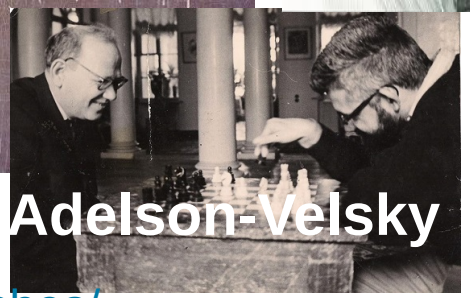
Errements, découvertes, redécouvertes, financement, politique, buzz, recherche d'algorithmes pour des problèmes réels :

« I spent the Fall quarter (of 1950) at RAND. My first task was to find a name for multistage decision processes. An interesting question is, Where did the name, dynamic programming, come from? The 1950s were not good years for mathematical research. We had a very interesting gentleman in Washington named Wilson. He was Secretary of Defense, and he actually had a pathological fear and hatred of the word research. I'm not using the term lightly; I'm using it precisely. His face would suffuse, he would turn red, and he would get violent if people used the term research in his presence. You can imagine how he felt, then, about the term mathematical. The RAND Corporation was employed by the Air Force, and the Air Force had Wilson as its boss, essentially. Hence, I felt I had to do something to shield Wilson and the Air Force from the fact that I was really doing mathematics inside the RAND Corporation. What title, what name, could I choose? In the first place I was interested in planning, in decision making, in thinking. But planning, is not a good word for various reasons. I decided therefore to use the word "programming". I wanted to get across the idea that this was dynamic, this was multistage, this was time-varying. I thought, let's kill two birds with one stone. Let's take a word that has an absolutely precise meaning, namely dynamic, in the classical physical sense. It also has a very interesting property as an adjective, and that it's impossible to use the word dynamic in a pejorative sense. Try thinking of some combination that will possibly give it a pejorative meaning. It's impossible. Thus, I thought dynamic programming was a good name. It was something not even a Congressman could object to. So I used it as an umbrella for my activities. »



https://en.wikipedia.org/wiki/Evgenii_Landis





Georgii Adelson-Velsky

https://dailyscience.be/05/04/2018/la-vie-en-graphes/

https://fr.wikipedia.org/wiki/Richard_Bellman

https://fr.wikipedia.org/wiki/Robert_Tarjan

Théorie des Graphes 4

- AlgoAvanceePart1.pdf

Planche 64 à 84 (MST, Kruskal, Complexité UNION-FIND)

https://en.wikipedia.org/wiki/Kruskal%27s_algorithm
http://www-desir.lip6.fr/~spanjaard/cours/Algo_cours9.pdf

Enumérer les sommets

ParcoursGenerique(G,s):

- $L := \{s\}$
- $B := Voisins(s)$
- Tant que $B \neq \emptyset$
  - choisir u dans B
  - $L := L \cup \{u\}$.
  - $B := B - \{u\}$.
  - $B := B \cup (Voisins(u) - L)$

ParcoursNumerotation(G,s):

- $num := 0$
- $numero[s] := num$; $num := num + 1$.
- $L := \{s\}$
- $B := Voisins(s)$
- Tant que $B \neq \emptyset$
  - choisir u dans B
  - $numero[s] := num$; $num := num + 1$.
  - $L := L \cup \{u\}$.
  - $B := B - \{u\}$.
  - $B := B \cup (Voisins(u) - L)$

Bug
u

UneComposante(G,s):

- $L := \{s\}$
- $B := Voisins(s)$
- Tant que $B \neq \emptyset$
  - choisir u dans B
  - $L := L \cup \{u\}$.
  - $B := B - \{u\}$.
  - $B := B \cup (Voisins(u) - L)$
- Retourner L

ComposantesConnexes(G)

- Tant que $V \neq \emptyset$
  - Choisir s dans V
  - $L := UneComposante(G, s)$
  - Afficher L
  - $V := V - L$

Implémenter BFS(s) avec niveau

- $Discovered[s] := true$; $Discovered[v] := false$ pour $v \neq s$.
- $L[0] = \{s\}$; i:=0 // Layer counter
- Set $T = \emptyset$ // Arbre
- Tant que $L[i] \neq \emptyset$
  - $L[i+1] := \emptyset$
  - Pour chaque $u \in L[i]$
    - Pour chaque arête $(u, v) \in E$
    - Si $Discovered[v] == false$ alors
    - Discovered[v]:=true;
    - Ajouter (u, v) à l'arbre T $(\pi(v) = u)$.
    - Ajouter v à $L[i+1]$
    - Fin si
  - Fin pour
  - i:=i+1
- Fin tant que

Manque Fin Pour

Temps $O(n+m)$, où n est le nombre de sommets, et m le nombre d'arêtes avec une représentation par liste de successeurs.

Implémenter DFS(s)

- $Discovered[s] := true$; $Discovered[v] := false$ pour $v \neq s$.
- Créer S comme la pile contenant uniquement l'élément s
- Tant que $S \neq \emptyset$
  - Prendre le sommet u de S
  - Si $Discovered[u] == false$ alors
    - $Discovered[u] := true$
    - Pour chaque arête $(u, v) \in E$
    - Ajouter u à la pile S
    - Fin pour
  - Fin si
- Fin while

Bug
Boucle infinie ?

- Les piles et les files sont des sacs.
- Une pile est un sac LIFO (Last-In First-Out)
  - lorsqu'on retire un élément, on récupère toujours le dernier ajouté.
  - ajouter se dit *empiler* (push), retirer se dit *dépiler* (pop).
- Une file est un sac FIFO (First-in First-Out)
  - on retire les éléments dans l'ordre de leur insertion.
  - ajouter se dit *enfiler*, retirer se dit *défiler*.

Temps $O(n + m)$, où n est le nombre de sommets, et m le nombre d'arêtes, avec une représentation par liste de successeurs.

DFS(s)

- Marquer s comme "exploré" et ajouter s à L.
- Pour chaque arête $(s, v) \in E$
  - si v n'est pas marqué "exploré" alors
    - appeler récursivement DFS(v)

FIFO / LIFO
Parcours Préfixe/Suffixe/Infixe

Déf. Dans un parcours préfixe (*preorder traversal*), chaque nœud est visité avant que ses enfants soient visités.

Déf. Dans un parcours postfixe (*postorder traversal*), chaque nœud est visité après que ses enfants sont visités.

```
   Algo PARCOURS-PRÉFIXE(x)
1  if x ≠ null then
2      visiter x
3      for i ← 1, ..., k do PARCOURS-PRÉFIXE(enfant(x, i))
```

```
   Algo PARCOURS-POSTFIXE(x)
1  if x ≠ null then
2      for i ← 1, ..., k do PARCOURS-POSTFIXE(enfant(x, i))
3      visiter x
```

FIFO / LIFO
Parcours Préfixe/Suffixe/Infixe

Un arbre binaire est un ensemble fini de nœuds qui est soit vide soit constitué d'une racine et de 2 arbres binaires disjoints, appelés le sous-arbre gauche et le sous-arbre droit. Nous désirons coder un arbre binaire avec une représentation chaînée où chaque nœud de l'arbre stockera un caractère (fourni par l'utilisateur), son numéro de création (calculé automatiquement), l'adresse du nœud représentant son fils gauche et l'adresse du nœud représentant son fils droit.

a) Ecrire la structure de données **nœud** la plus adaptée pour représenter un nœud de l'arbre.

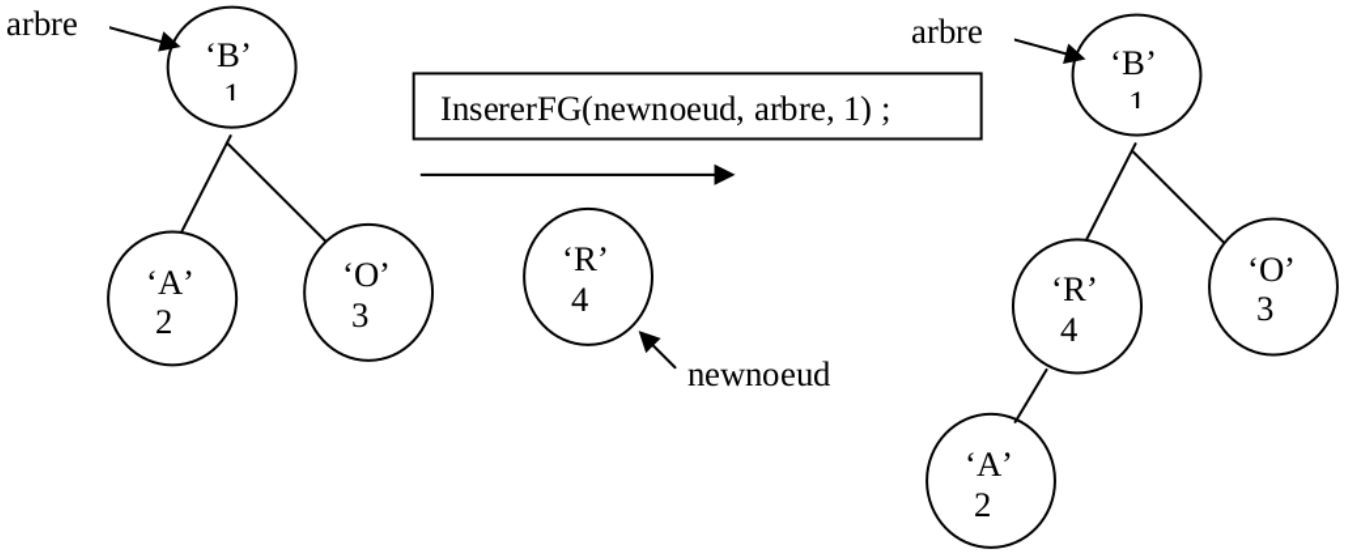
b) Ecrire une fonction **nouvNoeud** qui prend en paramètre un caractère **carac** permet d'allouer de l'espace mémoire pour un nœud et d'initialiser les champs du nœud (val avec **carac**, num avec le n° de création du nœud automatiquement incrémenté à chaque appel de **nouvNoeud**, et le fils gauche et le fils droit à NULL). Cette fonction devra renvoyer le nœud créé et initialisé.

c) On suppose que **vous disposez** d'une fonction **RechercheNoeud** qui prend en paramètre un arbre(ou sous-arbre) et le numéro du nœud recherché et qui renvoie le nœud (dont le champ contenant le n° de création est égal au numéro de nœud passé en paramètre).
Le code de la fonction **rechercheNoeud** est le suivant :

```
nœud * rechercheNoeud( nœud *n, int num_nœud){
    noeud  *tmpNoeud;

    if(noeud == NULL)
            return(NULL);
    if(noeud->num == numnoeud)
            return(noeud);

    tmpNoeud = RechercheNoeud(noeud->filsG,numnoeud);
    if(tmpNoeud!=NULL)
            return(tmpNoeud);

    return(RechercheNoeud(noeud->filsD, numnoeud));
 }
```

FIFO / LIFO
Parcours Préfixe/Suffixe/Infixe

Ecrire une fonction **insererFG**, qui prend en paramètres le nœud à insérer, l'arbre (nœud qui correspond à la racine) dans lequel il doit être insérer et le numéro du nœud sous lequel il doit être inséré en fils gauche. Cette fonction ne renvoie rien.
Rq : cette fonction fera appel à la fonction **rechercheNoeud** pour trouver le nœud où le nœud doit être inséré en fils gauche. Si celui-ci possède déjà un fils gauche alors il deviendra le fils gauche du nœud inséré .



d) Le parcours préfixe d'un arbre revient à partir de la racine de l'arbre, à "visiter" le nœud rencontré et à parcourir la branche gauche du nœud en visitant tous les nœuds rencontrés. Ce parcours continue jusqu'à un nœud NULL. A ce stade, on retourne à l'ancêtre le plus proche qui a un fils droit et on continue ….
Ecrire un fonction récursive **parcoursPrefixe** qui prend en paramètre l'adresse d'un nœud (racine d'un arbre ou sous-arbre), et ne renvoie rien. Cette fonction affichera le caractère contenu dans chacun des nœuds visités.

En supposant que l'on dispose d'une fonction **insererFD** (vous pouvez la coder s'il vous reste du temps), et que l'on insère comme fils droit du nœud de numéro 4 (sur la figure précédente), un nœud contenant la lettre 'V', dites ce qui serait affiché à l'écran après l'appel de la fonction **parcoursPrefixe**.

FIFO / LIFO
Parcours Préfixe/Suffixe/Infixe

```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

typedef struct noeud{
	int num;
	char val;
	struct noeud *filsD,*filsG;
}noeud, *ptrNoeud;

ptrNoeud nouvNoeud(char valeur){
	ptrNoeud newnoeud;
	static int numero;

	newnoeud = (ptrNoeud) malloc(sizeof(noeud));
	if(newnoeud){
		newnoeud->num = numero++;
		newnoeud->val = valeur;
		newnoeud->filsG= NULL;
		newnoeud->filsD = NULL;
	}else
		printf("problème dans l'allocation mémoire pour un noeud\n");
	return(newnoeud);
}

void parcoursPrefixe(ptrNoeud n){
	if(n){
		printf("%c ", n->val);
		ParcoursPrefixe(n->filsG);
		ParcoursPrefixe(n->filsD);
	}
}
```

FIFO / LIFO
Parcours Préfixe/Suffixe/Infixe

```
ptrNoeud rechercheNoeud(ptrNoeud n, int numNoeud){
        ptrNoeud tmpNoeud;

        if(n == NULL)
                return(NULL);
        if(n->num == numNoeud)
                return(n);

        tmpNoeud = rechercheNoeud(n->filsG,numNoeud);
        if(tmpNoeud!=NULL)
                return(tmpNoeud);

        return(rechercheNoeud(n->filsD, numNoeud));
}

 void insererNoeudFG(ptrNoeud n, ptrNoeud arbre,int numnoeud){
        ptrNoeud noeudCour = NULL;

        noeudCour=rechercheNoeud(arbre, numnoeud);
        if(noeudCour){
                n->filsG = noeudCour->filsG;
                noeudCour->filsG = n;
        }else
                printf("Le noeud de n° %d n'existe pas \n", n->num);
 }
```

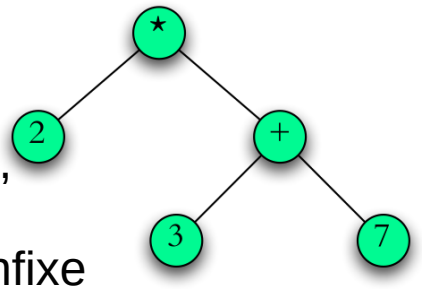
FIFO / LIFO
Parcours Préfixe/Suffixe/Infixe

Spécifiquement pour un arbre binaire, une troisième possibilité :

Déf. Dans un parcours infixe (*inorder traversal*), chaque nœud est visité après son enfant gauche mais avant son enfant droit.

```
Algo PARCOURS-INFIXE(x)
1 if x ≠ null then
2     PARCOURS-INFIXE(gauche(x))
3     visiter x
4     PARCOURS-INFIXE(droit(x))
```

Arbre syntaxique

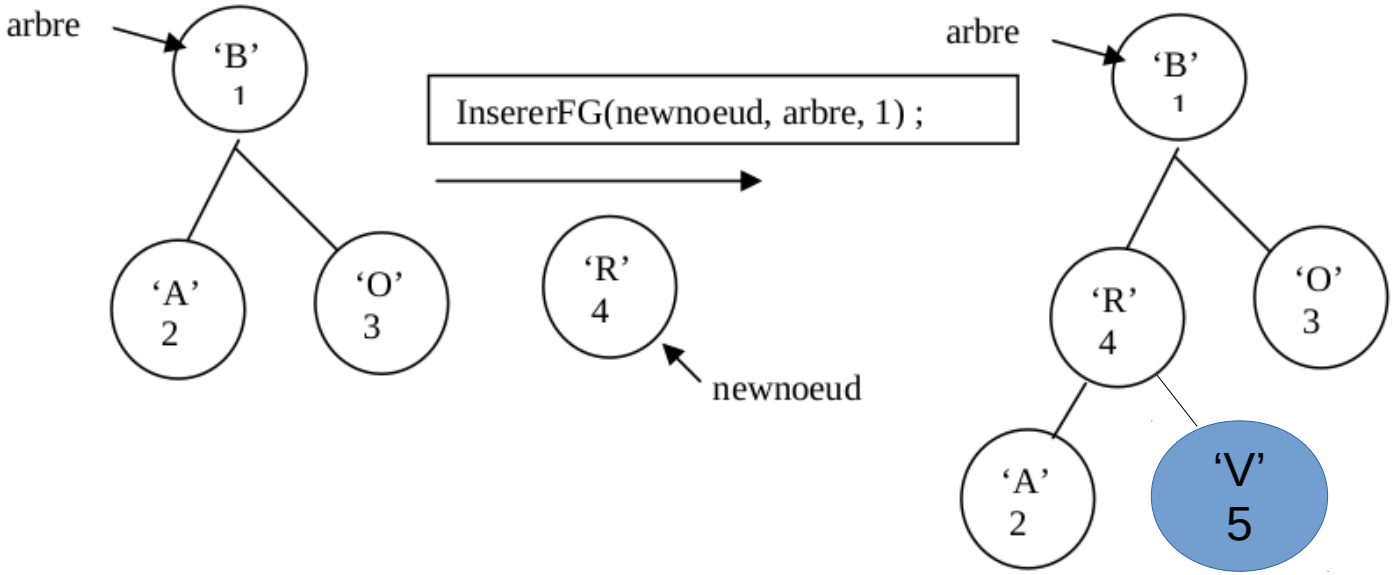


notation infixe: 2*(3+7)
notation préfixe: * 2 + 3 7
notation postfixe: 2 3 7 + *

Notation polonaise pour préfixe (DFS récursif),
Polonaise inversée pour postfixe,
Et ajout de parenthèse par sous-arbre pour l'infixe
Le parcours infixe permet également de trier un arbre binaire de recherche

http://math.univ-lyon1.fr/irem/IMG/pdf/parcours_arbre_avec_solutions-2.pdf

FIFO / LIFO
Parcours Préfixe/Suffixe/Infixe



Création récursive d'un arbre binaire ?

https://www.irif.fr/~jep/PDF/TCC/XC7.pdf

FIFO / LIFO
Parcours Préfixe/Suffixe/Infixe

Un arbre correspond à un couple formé

1. d'un sommet particulier, appelé sa racine,
2. et d'une partition des sommets restants en un ensemble d'arbres.

Cette vision permet de faire des preuves inductives (mais récursion lourde)

Exemple: montrer qu'un arbre dont tous les sommets sont d'arité au moins 2 possède plus de feuilles que de sommets internes.

Plus simple pour les arbres binaires

Un arbre binaire est

- soit vide
- soit l'union disjointe d'un sommet, appelé sa racine, d'un arbre binaire, appelé sous-arbre gauche, et d'un arbre binaire, appelé sous-arbre droit.

De façon très formelle, certains diront qu'un arbre binaire d'entiers est solution de l'équation (voir Cours de l'X):

$$A = \textbf{null} \uplus (A \times \textbf{int} \times A)$$

FIFO / LIFO
Parcours Préfixe/Suffixe/Infixe

Arbres binaires

Un arbre binaire possède des nœuds et des feuilles. Certains disent plutôt nœuds internes et nœuds externes.
On peut définir la structure d'arbre binaire de façon récursive.
Si $\mathcal{N}$ (*resp.* $\mathcal{F}$) désigne l'ensemble des valeurs des nœuds (*resp.* des valeurs des feuilles), l'ensemble $\mathcal{A}(\mathcal{N},\mathcal{F})$ des arbres binaires est défini par :

- toute feuille est un arbre : $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}(\mathcal{N},\mathcal{F})$;
- si α et β sont deux arbres, et si $n \in \mathcal{N}$, alors (n,α,β) est un arbre.

Le typage Camlcorrespondant est le suivant :

```
type ('n,'f) arbre_binaire =
    | Feuille of 'f
    | Noeud of 'n * ('n,'f) arbre_binaire * ('n,'f) arbre_binaire ;;
```

Un exemple d'arbre binaire du type `(int,string) arbre_binaire` est :

```
Noeud(1,Feuille "a",
      Noeud(6,Noeud(4,Feuille "c",
                      Feuille "d")
              Feuille "b"))
```

→ **Manque une ,**

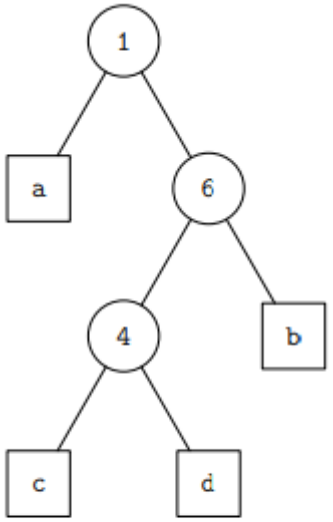


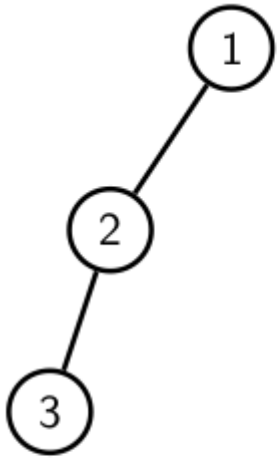
Figure 1 Un premier exemple d'arbre binaire

Souvent on l'écrit (α,n,β) plutôt que (n,α,β)

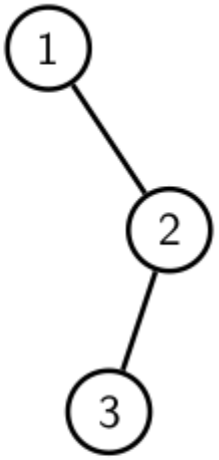
FIFO / LIFO
Parcours Préfixe/Suffixe/Infixe

Un arbre binaire est différent d'un arbre dont tous les degrés sont <=2 car la notion de filsG et filsD (donc de fils ordonné dans un tableau ou liste à deux éléments indicés) est importante

En fait,



et



ne sont pas les même arbres binaires, car

$$(((\emptyset, 3, \emptyset), 2, \emptyset), 1, \emptyset) \neq (\emptyset, 1, ((\emptyset, 3, \emptyset), 2, \emptyset))$$

Reproduisez cette notation pour le cas de l'arbre « Bravo »
(format Caml ou Lisp : langages de programmation fonctionnel dont la structure de base sous forme de liste récursive en font un puissant outil de modélisation pour les graphes)

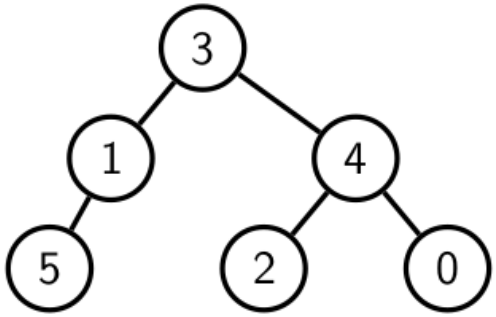
https://caml.inria.fr/about/history.fr.htm

https://fr.wikipedia.org/wiki/Lisp

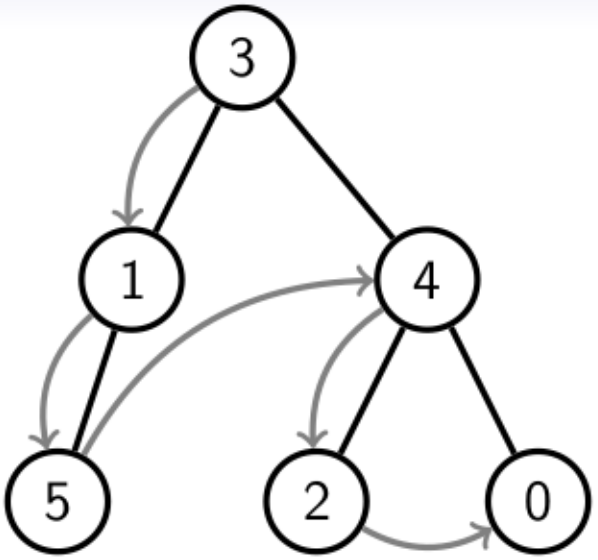
Structure récursive de construction

```
class Arbre {
    int val; Arbre gauche, droite;
    Arbre (Arbre gauche, int val, Arbre droite) {
        this.gauche = gauche;
        this.val = val;
        this.droite = droite; }}
```

```
new Arbre (
   new Arbre (
      new Arbre (null,5,null),
      1,
      null),
   3,
   new Arbre (
      new Arbre (null,2,null),
      4,
      new Arbre (null,0,null)))
```



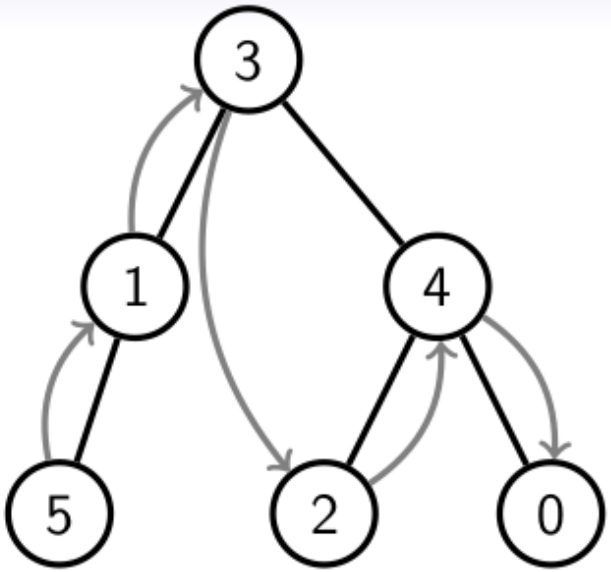
Parcours en profondeur: préfixe



- Si le traitement d'un sommet consiste à l'afficher, on affichera dans l'ordre 3, 1, 5, 4, 2, 0.

```
static void Affiche(Arbre a) {
   if (a==null) return;
   System.out.println(a.val+" ");
   Affiche(a.gauche);
   Affiche(a.droite);
 }
```

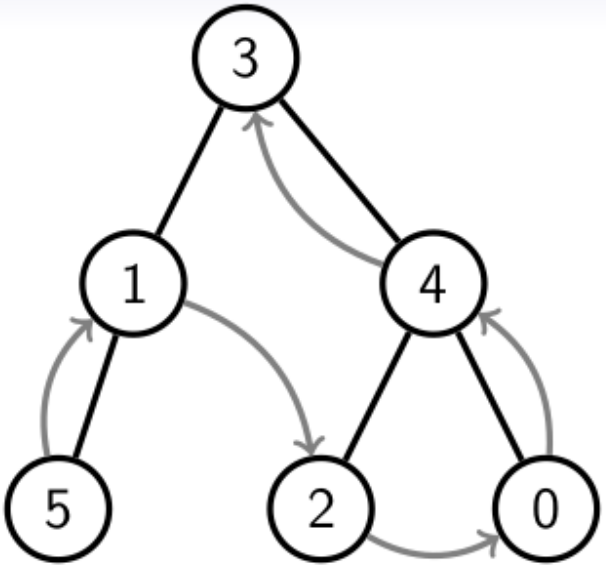
Parcours en profondeur: infixe



- Si le traitement d'un sommet consiste à l'afficher, on affichera dans l'ordre 5, 1, 3, 2, 4, 0.

```
static void Affiche(Arbre a) {
   if (a==null) return;
   Affiche(a.gauche);
   System.out.println(a.val+" ");
   Affiche(a.droite);
 }
```

Parcours en profondeur: postfixe



- Si le traitement d'un sommet consiste à l'afficher, on affichera dans l'ordre 5, 1, 2, 0, 4, 3.

```
static void Affiche(Arbre a) {
   if (a==null) return;
   Affiche(a.gauche);
   Affiche(a.droite);
   System.out.println(a.val+" ");
 }
```

Pour conclure

- DFS, BFS arbre couvrant sur des graphes non valué
- Si graphe valué sur les arête : Kruskal algorithme donne un AC-> MST Minimum Spanning Tree (AC de poids minimal ou ACM)
- Complexité amortie : due à A. Tarjan
- En C ? En Java ? Commencer à réfléchir aux formats pour charger/créer des graphes dans vos programmes facilement