Chapitre 11

Determinants

11.1 Introduction.

Considérons le système

$$\begin{cases} x+2y-4z=1 & (L1) \\ x-y+2z=2 & (L2) \\ 2x+y-2z=3 & (L3) \end{cases}$$

Il est équivalent à

$$\begin{cases} 3x=5 & (L1+2.L2) \\ x-y+2z=2 & (L2) \\ 2x+y-2z=3 & (L3) \end{cases}$$

ou encore à :

$$\begin{cases} 3x=5 & (L1+2.L2) \\ x-y+2z=2 & (L2) \\ 3x=5 & (L3+L2) \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} x=5/3 \\ -y+2z=1/3 \end{cases}$$

qui a une infinité de solutions.

La matrice du système linéaire est modifiée par ces différentes opérations... On va introduire la notion de déterminant de manière que :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} (L1) \\ (L2) \\ (L3) \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} (L1+2.L2) \\ (L2) \\ (L3) \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} (L1+2.L2) \\ (L2) \\ (L3+L2) \end{matrix}$$

Par ailleurs, si on modifie légèrement le système précédent :

$$\begin{cases} x+2y-4z=1 & (L1) \\ x-y+2z=2 & (L2) \\ 2x+y-2z=4 & (L3) \end{cases}$$

on obtient :

$$\begin{cases} 3x=5 & (L1+2.L2) \\ x-y+2z=2 & (L2) \\ 3x=6 & (L3+L2) \end{cases}$$

qui n'a pas de solution bien que le déterminant soit le même. C'est le second membre qui fait la différence.

Par contre, quand on considère

$$\begin{cases} x+2y-4z=a & (L1) \\ x-y+2z=b & (L2) \\ 2x+2y-2z=c & (L3) \end{cases}$$

Il est équivalent à

$$\begin{cases} 3x=a+2b & (L1+2.L2) \\ x-y+2z=b & (L2) \\ 3x+y=b+c & (L3+L2) \end{cases}$$

ou encore à :

$$\begin{cases} x=\frac{a+2b}{3} \\ x-y+2z=b \\ y=b+c-3x=b+c-a-2b=-a-b+c \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} x=\frac{a+2b}{3} \\ z=\frac{b-x+y}{2}=\frac{-a-2b}{6}+\frac{b-a-b+c}{2}=\frac{-a-2b-3a+3c}{6}=\frac{-4a-2b+3c}{3} \\ z=-a-b+c \end{cases}$$

et donc une solution unique quelles que soient les valeurs de a, b et c. Au niveau des déterminants, on aura :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} (L1) \\ (L2) \\ (L3) \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} (L1+2.L2) \\ (L2) \\ (L3+L2) \end{matrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} (L1+2.L2) \\ (L3+L2) \\ (L2) \end{matrix}$$

11.2 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base.

Théorème (admis) : Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ une base de E. Alors, il existe une unique application $\varphi_0 : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie

1. $\forall i \in \{1,2,\dots,n\}$,
   $\forall \vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n,\vec{u}'_i \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$,
   $$\varphi_0(\vec{u}_1,\dots,\lambda\cdot\vec{u}_i+\vec{u}'_i,\dots,\vec{u}_n)=\lambda\varphi(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_i,\dots,\vec{u}_n)+\varphi(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}'_i,\dots,\vec{u}_n).$$
2. $\forall \vec{x}\in E,\ \varphi_0(\dots,\vec{x},\dots,\vec{x},\dots)=0$.
3. $\varphi_0(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)=1$.

De plus, toute application $\varphi : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie les deux premières propriétés est proportionnelle à φ_0.

Définition : Pour toute famille $(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)$ de n vecteurs de E, le réel $\varphi_0(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)$ est appelé déterminant de la famille $(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ et est noté

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n).$$

11.3 Propriétés des déterminants.

Proposition : Si $\mathcal{L}$ est une autre base de E, alors, pour toute famille $(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)$ de n vecteurs de E, on a

$$\det_{\mathcal{L}}(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)=\det_{\mathcal{L}}(\mathcal{B})\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n).$$

Démonstration

Proposition : Soit $\mathcal{B}$ une base de E (de dimension n), $(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)$ une famille de E. Alors, pour tout $i<j$,

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_i,\dots,\vec{u}_j,\dots,\vec{u}_n)=-\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_j,\dots,\vec{u}_i,\dots,\vec{u}_n).$$

Démonstration

Proposition : Soit $\mathcal{B}$ une base de E (de dimension n), $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ une famille de E. Si la famille $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est liée, alors

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) = 0.$$

Démonstration

Proposition : Soit $\mathcal{B}$ une base de E (de dimension n), $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ une famille de E. Le déterminant de cette famille dans la base $\mathcal{B}$ reste inchangé si on ajoute à l'un des vecteurs une combinaison linéaire des autres. Autrement dit, pour tout indice j,

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_j, \ldots, \vec{u}_n) = \det_{\mathcal{B}}\left(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_j + \sum_{i \neq j} \lambda_i \cdot \vec{u}_i, \ldots, \vec{u}_n\right)$$

Démonstration

Théorème : Si $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est une famille de n vecteurs de E (de dimension n) muni d'une base $\mathcal{B}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :
- (i) $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) \neq 0$.
- (ii) La famille $(\vec{u}_i, 1 \leq i \leq n)$ est une base de E.

Démonstration

11.4 Déterminant d'un endomorphisme.

Proposition : Soit E un espace vectoriel de dimension n. Si f est un endomorphisme de E, il existe un unique réel λ tel que, pour toute base $\mathcal{B}$ de E, et pour toute famille $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ de vecteurs de E, on ait :

$$\det_{\mathcal{B}}(f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_n)) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n).$$

Proposition : Soit E un espace vectoriel de dimension n, f et g deux endomorphismes de E. Alors,

$$\det(f \circ g) = \det(f)\det(g).$$

Démonstration

Proposition : Soit f un endomorphisme de E. Alors, f est bijectif si et seulement si $\det(f) \neq 0$ et dans ce cas,

$$\det\left(f^{-1}\right) = \frac{1}{\det(f)}.$$

Démonstration

11.5 Déterminant d'une matrice carrée.

Définition : Soit A une matrice carrée d'ordre n. On appelle déterminant d'une matrice carrée d'ordre n le déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On le note $\det(A)$.

Notation : si $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, le déterminant de A se note

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Exemple :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Proposition : Soit f un endomorphisme de E, $\mathcal{B}$ une base de E. Si A est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, alors $\det(f) = \det(A)$.

Proposition : Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. Alors,

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Théorème : Si A est une matrice carrée d'ordre n,

$$\det(A) = \det\left({}^tA\right).$$

Corollaire : Les propriétés des déterminants par rapport aux colonnes de la matrice sont également vraies pour les lignes.

11.6 Calcul pratique des déterminants.

a) Opérations sur les lignes et les colonnes.

En utilisant les propriétés vues précédemment, nous pouvons déjà énoncer un certains nombres de règles qui vont nous permettre de montrer qu'un déterminant est nul ou de faire apparaître le maximum de 0 dans le déterminant afin de faciliter son calcul par la suite :

- Un déterminant qui a deux colonnes ou deux lignes identiques est nul.
- Un déterminant qui a une colonne (ou une ligne) formée de 0 est nul.
- L'échange de deux colonnes (ou de deux lignes) du déterminant multiplie le déterminant par -1.
- On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant à une colonne (ou à une ligne) une combinaison linéaire des autres.
- Si l'on multiplie une colonne (ou une ligne) par un coefficient λ, cela revient à multiplier le déterminant par λ.

b) Développement du déterminant suivant une ligne ou une colonne.

Proposition : Si A est une matrice de la forme

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & A' & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{array}\right),$$

alors

$$\det(A) = a_{nn} \det(A').$$

Corollaire : Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice triangulaire, alors

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Définition : Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n. Pour i et j fixés, on appelle mineur de a_{ij} le déterminant Δ_{ij} de la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A.

Théorème (Développement suivant une colonne) : Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n. On a, pour tout indice j fixé,

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \Delta_{ij}.$$

avec

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Théorème (Développement suivant une ligne) : Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n. Alors, pour tout indice de ligne i,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}.$$

Corollaire (Règle de Sarrus) :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

11.7 Système de Cramer.

Définition : Un système linéaire est dit de Cramer d'ordre n si

- C'est un système de n équations à n inconnues.
- Il admet une solution unique

Théorème : Il y a équivalence entre

1. Le système est de Cramer
2. Le système homogène associé n'admet que le vecteur nul comme solution.

3. La matrice A est inversible
4. $\det(A) \neq 0$

Théorème : Soit le système de Cramer d'ordre n

$$AX = B \quad (\mathcal{S})$$

Notons A_i la matrice obtenue à partir de A en remplaçant sa i-ème colonne par B. Alors l'unique solution de $(\mathcal{S})$ est le n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ défini par :

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}.$$

Exemple : Considérons le système

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \qquad (S)$$

Sa matrice associée est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0.$$

Le système est donc de Cramer dont la solution est donnée par

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = 5 \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{-1} = -2.$$