# Chapitre 9

# ESPACES VECTORIELS

## 9.1 Vecteurs du plan.

On appelle **vecteur** du plan tout élément de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, c'est à dire tout couple $(x_1, x_2)$ avec $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$. Le réel $x_1$ est la première **composante** du couple et $x_2$ la seconde. Dans ce cas, les vecteurs seront notés surmontés d'une flèche : $\vec{u} = (1, 2)$.

On dispose de deux opérations sur les vecteurs du plan ;
- addition : si $\vec{x} = (x_1, x_2)$ et $\vec{y} = (y_1, y_2)$, on pose $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$.
- multiplication par un réel : si $\vec{x} = (x_1, x_2)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $\lambda \cdot \vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2)$.

**Remarque** : tout vecteur $\vec{x} = (x_1, x_2)$ s'écrit alors

$$\vec{x} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2$$

avec $\vec{e}_1 = (1, 0)$ et $\vec{e}_2 = (0, 1)$ (souvent notés $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans les classes antérieures).

## 9.2 Vecteurs de l'espace.

On définit de façon identique les vecteurs de l'espace (tri-dimensionnel) comme les éléments de

$$\mathbb{R}^3 = \big\{(x_1, x_2, x_3);\ x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \in \mathbb{R},\ x_3 \in \mathbb{R}\big\}.$$

Un élément $(x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est appelé **triplet**. On y définit comme avant
- l'addition : si $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ et $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$, alors $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$
- la multiplication par un réel : si $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda \cdot \vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$.

Dans le plan vectoriel ou l'espace tri-dimensionnel, on appelle vecteur nul le vecteur dont toutes les composantes sont nulles c'est à dire $\vec{0} = (0, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$ et $\vec{0} = (0, 0, 0)$ dans $\mathbb{R}^3$.

Parce que $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont des ensembles de vecteurs ayant certaines propriétés vis à vis de l'addition et de la multiplication par un réel, on dit que ce sont des exemples d'espaces vectoriels. On développera la théorie générale des espaces vectoriels plus loin dans ce chapitre mais nous allons déjà nous familiariser avec certains concepts dans le cas de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

## 9.3 Sous-espace vectoriel.

Une notion importante est la notion de **sous-espace vectoriel** qui désigne une partie de l'espace vectoriel qui est **stable** par addition et par multiplication par un réel. Ainsi, on dira que $F$ est un s.e.v. si c'est une partie non vide qui vérifie
- $\vec{x} \in F$ et $\vec{y} \in F \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in F$.
- $\vec{x} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot \vec{x} \in F$.

**Remarque** : si $F$ est un s.e.v., alors la seconde propriété appliquée avec $\lambda = 0$ entraîne que $\vec{0} \in F$.

## 9.4 Exemples

Quelles sont, parmi les parties suivantes de $\mathbb{R}^3$, celles qui sont des s.e.v. ?
- $A = \big\{(x_1, x_2, x_3);\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 0\big\}$
- $B = \big\{(x_1, x_2, x_3);\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4\big\}$
- $C = \big\{(x_1, x_2, x_3);\ x_1 = 3x_2 = -7x_3\big\}$.

• $A = \{(x_1, x_2, x_3);\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 0\}$ est un sev :
si $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ appartient à $A$, c'est à dire $x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 0$ et si $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in A$, c'est à dire $y_1 - 2y_2 + 7y_3 = 0$, alors $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ appartient à $A$ puisque

$$\begin{aligned}(x_1 + y_1) \quad & -2(x_2 + y_2) + 7(x_3 + y_3)\\ & = (x_1 - 2x_2 + 7x_3) + (y_1 - 2y_2 + 7y_3)\\ & = 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

De plus, si $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in A$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda \cdot \vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ appartient à $A$ car

$$\lambda x_1 - 2\lambda x_2 + 7\lambda x_3 = \lambda(x_1 - 2x_2 + 7x_3) = \lambda 0 = 0.$$

• $B = \{(x_1, x_2, x_3);\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4\}$ n'est pas un s.e.v. : $\vec{0} \notin B$.
• $C = \{(x_1, x_2, x_3);\ x_1 = 3x_2 = -7x_3\}$ est un s.e.v. (exercice).

## 9.5 Droite vectorielle

On a en fait

$$\begin{aligned}C & = \left\{(x_1, x_2, x_3);\ x_2 = \frac{1}{3}x_1,\ x_3 = -\frac{1}{7}x_1\right\}\\ & = \left\{\left(x_1, \frac{1}{3}x_1, -\frac{1}{7}x_1\right);\ x_1 \in \mathbb{R}\right\}\\ & = \left\{x_1 \cdot \left(1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{7}\right);\ x_1 \in \mathbb{R}\right\}\end{aligned}$$

Cela montre que $C$ est une droite vectorielle "engendrée" par $\left(1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{7}\right)$.

Comme on le prouvera plus tard, les s.e.v. de $\mathbb{R}^2$ sont $\{\vec{0}\}$, $\mathbb{R}^2$, et les **droites vectorielles** qui se dessinent sous forme de droites contenant $\vec{0}$ et qui s'écrivent en fait :

$$\{\lambda \cdot \vec{u},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

où $\vec{u}$ est un vecteur non nul fixé appelé **vecteur directeur** de la droite. Un tel $\vec{u}$ n'est pas unique (n'importe quel vecteur non nul de la droite vectorielle convient).

## 9.6 Plan vectoriel

Par contre $A$ sera appelé plan vectoriel

$$\begin{aligned}A & = \{(x_1, x_2, x_3);\ x_1 = 2x_2 - 7x_3\}\\ & = \{(2x_2 - 7x_3, x_2, x_3);\ x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}\\ & = \{x_2 \cdot (2, 1, 0) + x_3 \cdot (-7, 0, 1);\ x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

Un vecteur de $A$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $(2, 1, 0)$ et $(-7, 0, 1)$.

On verra que dans $\mathbb{R}^3$, les s.e.v. peuvent être $\{\vec{0}\}$, $\mathbb{R}^3$, une droite vectorielle, un "plan vectoriel" c'est à dire

$$\{\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs fixés, **non colinéaires** : il n'existe pas $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v}$ ou $\vec{v} = \alpha \cdot \vec{u}$.

## 9.7 Autres exemples de structures vectorielles.

**a)** $\mathbb{R}^n$

Soit $n$ un entier $\geq 2$. L'ensemble $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ est formé de **n-uplets** $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où chacune des composantes $x_i$ est un réel. On définit sur cet ensemble

– l'addition : si $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ alors
$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$
– la multiplication par un réel : si $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors
$$\lambda \cdot \vec{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

**b) Les polynômes.**

Sur l'ensemble des polynômes à une indéterminée notée $X$, qui est noté $\mathbb{R}[X]$, on peut définir deux opérations :

– l'addition : si $P = p_0 + p_1 X + \cdots + p_k X^k$ et $Q = q_0 + q_1 X + \cdots + q_k X^k$, alors
$$P + Q = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1) + \cdots + p_k X^k.$$
– La multiplication par un réel : si $P = p_0 + p_1 X + \cdots + p_k X^k$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda P = \lambda p_0 + \lambda p_1 X + \cdots + \lambda p_k X^k.$$

**c) Les applications.**

Notons $\mathcal{F}(E, \mathrm{K})$ l'ensemble de toutes les applications d'un ensemble $E$ dans $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On définit l'addition : si $f, g \in \mathcal{F}(E, \mathrm{K})$, on pose

$$\begin{array}{rrcl} f + g : & E & \longrightarrow & \mathrm{K} \\ & x & \longmapsto & f(x) + g(x) \end{array}$$

et la multiplication par un réel : si $f \in \mathcal{F}(E, \mathrm{K})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{array}{rrcl} \lambda f : & E & \longrightarrow & \mathrm{K} \\ & x & \longmapsto & \lambda f(x) \end{array}$$

**d) Les suites.**

C'est un cas particulier du cas traité avant avec $E = \mathbb{N}$. L'ensemble des suites réelles par exemple est $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Avec les définitions ci-dessus, la somme de la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite notée $u + v$ de terme général $u_n + v_n$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite $\lambda u$ est celle de terme général $\lambda u_n$.

**e) Les nombres complexes.**

$\mathbb{C}$ est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel avec les deux opérations que sont

- l'addition de deux nombres complexes

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b').$$

- le produit d'un nombre complexe par un réel

$$\lambda(a + ib) = \lambda a + i\lambda b. \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Aux changements de notation près, il s'agit simplement de la structure vue sur $\mathbb{R}^2$ avec l'identification

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longleftrightarrow & \mathbb{C} \\ (a, b) & \longleftrightarrow & a + ib \end{array}$$

Cependant, dans $\mathbb{C}$ on dispose d'une opération supplémentaire : la multiplication interne qui sort du cadre de l'étude présente des espaces vectoriels.

## 9.8 Définition d'un espace vectoriel réel.

**Définition :** On dit que $(E, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ si :

1. $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E,\ (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$.
2. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E,\ \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$.
3. Il existe un vecteur noté $\vec{0}$ tel que $\forall \vec{x} \in E, \vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$.
4. Pour tout vecteur $\vec{x} \in E$, il existe un vecteur de $E$ noté $(-\vec{x})$ tel que $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$.
5. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in E,\ \alpha.(\vec{x} + \vec{y}) = (\alpha.\vec{x}) + (\alpha.\vec{y})$.
6. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall \vec{x} \in E,\ (\alpha + \beta).\vec{x} = (\alpha.\vec{x}) + (\beta.\vec{x})$.
7. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall \vec{x} \in E,\ \alpha.(\beta.\vec{x}) = (\alpha\beta).\vec{x}$.
8. $\forall \vec{x} \in E,\ 1.\vec{x} = \vec{x}$.

Tous les exemples de la partie précédente sont des espaces vectoriels.

## 9.9 Sous-espace vectoriel.

**Définition :** $(E, +, .)$ étant un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on dit que la partie non vide $F$ de $E$ est un sous-espace vectoriel (sev) de $E$ si $F$ est stable par les deux opérations $+$ et $\cdot$ i.e.

$$\vec{x} \in F \text{ et } \vec{y} \in F \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in F$$

$$\vec{x} \in F \text{ et } \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot \vec{x} \in F$$

$F$ muni de ces deux opérations a alors une structure d'espace vectoriel. Les deux propriétés précédentes peuvent être regroupées en une seule :

$$\vec{x}, \vec{y} \in F,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y} \in F.$$

**Remarque :** Tout sev contient nécessairement $\vec{0}$.

**Exemples :**

- Dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, on a déjà vu les différents types de sev.
- Dans $\mathbb{R}[X]$, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé,

$$\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X],\ d^oP \leq n\}$$

$$\{P \in \mathbb{R}[X],\ P(x_0) = 0\}$$

sont des sev.

- Par contre, voici des parties de $\mathbb{R}[X]$ qui ne sont pas des sev :
$$\{P \in \mathbb{R}[X],\ d^0 P \geq 1\}$$
$$\{P \in \mathbb{R}[X],\ d^o P = n\}$$
$$\{P \in \mathbb{R}[X], P(x_0) = 1\}.$$
- Dans l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites réelles,
$$\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}},\ u_n \longrightarrow 0\}$$
$$\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, \forall n \geq 1, u_{n+1} = au_n\}$$
$$\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall k \geq n_0,\ u_k = 0\}$$
fournissent trois exemples de sev.

**Proposition :** Toute intersection de sev est un sev.

**Remarque :** En revanche la réunion de sev n'est pas en général un sev. Par exemple la réunion de deux droites vectorielles distinctes dans $\mathbb{R}^2$ n'est pas un sev car cet ensemble n'est pas stable pour l'addition.

## 9.10 Sev engendré par une famille de vecteurs.

**Définition :** Soit $\{\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_n}\}$ une famille de vecteurs de $E$. On appelle **combinaison linéaire** de cette famille tout vecteur de la forme

$$\sum_{j\in J} \lambda_j \cdot \vec{f_j}$$

où $J \subset I$, $J$ finie, et $\forall j \in J$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$.

**Remarque** : Pour une famille finie $\{\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_n}\}$, une combinaison linéaire est un vecteur du type :

$$\lambda_1 \cdot \vec{f_1} + \cdots + \lambda_n \cdot \vec{f_n} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{f_i}$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

**Exemple** : tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ est combinaison linéaire de la famille

$$\{1, X, X^2, \ldots\} = \{X^n,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire de

$$\vec{e_1} = (1, 0, 0),\ \vec{e_2} = (0, 1, 0),\ \vec{e_3} = (0, 0, 1)$$

puisque tout $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ s'écrit

$$\vec{x} = x_1 \cdot \vec{e_1} + x_2 \cdot \vec{e_2} + x_3 \cdot \vec{e_3}.$$

**Proposition :** Tout sev $F$ est stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall(\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}) \in F^n, \forall(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{x_i} \in F$$

Démonstration

**Proposition :** Soit $\mathcal{F} = (\vec{f_i})_{i\in I}$ une famille de vecteurs de $E$. Il y a égalité entre :

1. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $\mathcal{F}$.
2. L'intersection de tous les sev de $E$ qui contiennent $\mathcal{F}$.
3. Le plus petit sev de $E$, au sens de l'inclusion, qui contient $\mathcal{F}$.

C'est un sev noté $\text{Vect}(\mathcal{F})$ et appelé sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$.

Démonstration

**Définition :** Si $\text{Vect}(\mathcal{F}) = E$, on dit que la famille $\mathcal{F}$ est **génératrice** de l'espace vectoriel $E$.

**Exemples :**

- Comme $\text{Vect}\{X^n,\ n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R}[X]$, la famille $\{X^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est génératrice de $\mathbb{R}[X]$.
- Avec les notations précédentes,
$$\text{Vect}(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}) = \mathbb{R}^3$$
et donc $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.
- Dans $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, espace des suites réelles, il est naturel de considérer, pour $k \in \mathbb{N}$, la famille $\{u^k = (u^k_n)_{n\in\mathbb{N}}, k \in \mathbb{N}\}$ donnée par

$$u_n^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $\text{Vect}\{u^k, k \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang. Ainsi, cette famille n'est pas génératrice de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

**Remarque :** Si $\mathcal{F} \subset \tilde{\mathcal{F}}$, alors $\text{Vect}(\mathcal{F}) \subset \text{Vect}(\tilde{\mathcal{F}})$ et par suite, si $\mathcal{F}$ est génératrice, $\tilde{\mathcal{F}}$ l'est aussi.

**Proposition :** Soit $(\vec{f_i})_{i\in I}$ une famille de vecteurs de $E$ telle que l'un de ses vecteurs $\vec{f_{i_0}}$ $(i_0 \in I)$ soit combinaison linéaire des autres :

$$\vec{f_{i_0}} = \sum_{i\in J_0} \mu_i \cdot \vec{f_i}$$

où $J_0$ est une partie finie de $I \setminus \{i_0\}$. Alors,

$$\text{Vect}(\vec{f_i},\ i \in I) = \text{Vect}(\vec{f_i},\ i \in I \setminus \{i_0\}).$$

Démonstration

Ainsi, une famille génératrice peut être appauvrie de tout vecteur qui est une combinaison linéaire des autres tout en restant génératrice. Dans le paragraphe suivant, nous allons formaliser la notion de famille où il n'y a pas de vecteur qui est combinaison linéaire des autres.

## 9.11 Notion de famille libre.

**Définition :** La famille $(\vec{f_i})_{i\in I}$ de vecteurs de l'espace vectoriel $E$ est dite **libre** si la seule combinaison linéaire nulle de cette famille est la combinaison linéaire dont tous les coefficients sont nuls. Par exemple, la famille finie $(\vec{f_1}, \dots, \vec{f_n})$ est libre si

$$\lambda_1 \cdot \vec{f_1} + \cdots + \lambda_n \cdot \vec{f_n} \Rightarrow \lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0.$$

**Exemples :**

- Montrons que la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ donnée dans $\mathbb{R}^4$ par
$$\vec{u}_1 = (2, 0, 3, 0),\ \vec{u}_2 = (0, -1, 0, 0), \vec{u}_3 = (5, -2, 0, 0)$$
est libre :
$$\begin{aligned} \lambda_1 \quad & \cdot\vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{u}_3 = \vec{0} \\ & \Rightarrow (2\lambda_1 + 5\lambda_3, -\lambda_2 - 2\lambda_3, 3\lambda_1, 0) = (0, 0, 0, 0) \\ & \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + 5\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 = 0 \end{cases} \\ & \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$
- Montrons que $\{X^2, X(X-1), (X-1)^2\}$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$.
$$\begin{aligned} \lambda_1 \quad & X^2 + \lambda_2 X(X-1) + \lambda_3 (X-1)^2 = 0 \\ & \Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)X^2 + (-\lambda_2 - 2\lambda_3)X + \lambda_3 = 0 \\ & \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \\ & \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \end{aligned}$$
- Montrons que dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la famille
$$\{x \mapsto |x - i|,\ i \in \mathbb{Z}\}$$
est libre. Supposons que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{i\in J} \lambda_i |x - i| = 0$$
où $J$ est une partie finie de $\mathbb{Z}$. Si il existe $i_0 \in J$ tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$, on écrit
$$|x - i_0| = -\sum_{i\in J\setminus\{i_0\}} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} |x - i|.$$
Or la fonction écrite à gauche n'est pas dérivable en $i_0$ alors que celle de droite l'est. Contradiction. Donc, pour tout $i \in J$, $\lambda_i = 0$ et on conclut que la famille est libre.

**Définition :** Quand une famille n'est pas libre, on dit qu'elle est **liée**.

**Remarque** : Toute famille contenant $\vec{0}$ est liée puisque $1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$ est une combinaison linéaire nulle de la famille dont les coefficients ne sont pas tous nuls.

**Proposition :** Toute partie d'une famille libre forme une famille libre.

**Remarque** : La famille de deux vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée si et seulement si

$$(\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}) \quad \text{ou} \quad (\exists \mu \in \mathbb{R},\ \vec{v} = \mu \cdot \vec{u}).$$

Dans ce cas, on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires**.

**Exemples :**

- Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la famille
$$\{x \mapsto 1,\ x \mapsto \cos^2 x,\ x \mapsto \cos 2x\}$$
est liée puisque
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 1 - 2\cos^2 x + \cos 2x = 0.$$
- $\{X^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$. En effet, toute combinaison linéaire de cette famille est un polynôme et un polynôme ne peut être nul que si tous ses coefficients sont nuls.

## 9.12 Bases.

**Définition :** On appelle **base** de l'espace vectoriel $E$ toute famille qui est à la fois libre et génératrice.

**Exemples :**

- $\{X^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$ appelée base canonique de $\mathbb{R}[X]$.
- Dans $\mathbb{R}^n$, une base très simple, appelée pour cela base canonique, est donnée par la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ avec :
$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= (1, 0, \ldots, 0) \\ \vec{e}_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0) \\ \vec{e}_k &= (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{k-ième position}}}{1}, 0, \ldots, 0) \end{aligned}$$

**Théorème :** Si un espace vectoriel $E$ possède une famille génératrice à $n$ éléments, alors toute famille ayant au moins $n+1$ vecteurs est liée et, par conséquent, toute famille libre possède au plus $n$ éléments.

Démonstration

**Corollaire :** Si un espace vectoriel $E$ admet deux bases finies, ces deux bases ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé dans ce cas la **dimension** de $E$ et notée $\dim E$.

**Exemple** : Compte tenu de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ explicitée précédemment,
$$\dim \mathbb{R}^n = n.$$

**ATTENTION** : Seuls certains espaces vectoriels admettent une base finie. Ils sont dits de **dimension finie**.
Par exemple, on a vu que $\mathbb{R}^n$ était de dimension finie. En revanche, $\mathbb{R}[X]$ n'est pas de dimension finie car il admet $\{X^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ pour base et cette famille n'est pas finie.

**Proposition :**

1. Une base est une famille libre maximale, c'est à dire qu'aucune sur-famille stricte n'est libre.
2. Une base est une famille génératrice minimale c'est à dire qu'aucune sous-famille stricte n'est génératrice.

Démonstration

**Théorème (Théorème de la base incomplète) :** Soit $E$ un espace vectoriel, $\mathcal{L}$ une famille libre et $\mathcal{G}$ une famille génératrice. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ telle que
$$\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G} \cup \mathcal{L}.$$

$\mathcal{B}$ s'obtient en complétant $\mathcal{L}$ avec des vecteurs de $\mathcal{G}$.

Démonstration

**Corollaire :** Tout espace non réduit à $\{\vec{0}\}$ admet une base.

**ATTENTION** : Dans le cas des espaces vectoriels de dimension infinie, il est parfois impossible d'expliciter une base. Par exemple pour $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Heureusement, bon nombre d'espaces vectoriels de dimension infinie ont une base explicite, par exemple $\mathbb{R}[X]$ qui admet, par exemple, pour base la base canonique $\{X^n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

## 9.13 Espaces vectoriels de dimension finie.

**Proposition :** Dans un espace vectoriel $E$ de dimension finie $n$ :

- Toute famille libre de $n$ éléments est une base.
- Toute famille génératrice de $n$ éléments est une base.
- Toute famille contenant plus de $n+1$ vecteurs est liée.
- Toute famille contenant moins de $n$ vecteurs n'est pas génératrice.

**Remarque :** Si $F$ est un sev de l'espace vectoriel $E$, il a la structure d'espace vectoriel et les notions de famille génératrice, dimension peuvent être étudiées relativement à $F$.

**Proposition :** Si $E$ est un espace vectoriel de dimension finie, tout sev $F$ de $E$ est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$.

**Proposition :** Soit $E$ un espace vectoriel, $F$ et $G$ deux sev de $E$ de dimension finie, alors

$$\left.\begin{array}{r} F \subset G \\ \dim F = \dim G \end{array}\right\} \Rightarrow F = G$$

Démonstration

**Proposition :** Soit $(\vec{f_i})_{i \in I}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel $E$. Cette famille est une base de $E$ si et seulement si pour tout $\vec{x} \in E$, il existe une unique famille de réels $(\lambda_i)_{i \in I}$ tous nuls sauf un nombre fini tels que

$$\vec{x} = \sum_{\substack{i \in I \\ \lambda_i \neq 0}} \lambda_i \cdot \vec{f_i}.$$

Démonstration

Dans le cas où $E$ est de dimension finie $n$, nous avons

$$\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_n}) \text{ est une base de } E \iff \forall \vec{x} \in E,\ \exists!(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\ \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \vec{f_i}.$$

Dans ce cas, les $x_i$ sont appelés les **composantes** ou **coordonnées** de $\vec{x}$ dans la base $(\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_n})$.

## 9.14 Rang d'une famille de vecteurs.

**Définition :** Soit $\{\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_n}\}$ une famille finie de vecteurs de l'espace vectoriel $E$. On appelle **rang** de cette famille la quantité :

$$\mathrm{rg}(\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_n}) = \dim \Big[\mathrm{Vect}\big(\{\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_n}\}\big)\Big].$$

**Proposition :** On ne change pas le rang d'une famille de vecteurs quand :

- On les permute.
- On multiplie l'un d'entre-eux par un réel non nul.
- On ajoute à l'un d'entre-eux une combinaison linéaire des autres.

Grâce à ces propriétés, on peut calculer pratiquement le rang d'une famille finie de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

## 9.15 Sommes de sous-espaces vectoriels.

On a déjà vu qu'étant donnés $F_1$ et $F_2$ deux sev d'un espace vectoriel $E$, l'intersection $F_1 \cap F_2$ était un sev de $E$. Par contre, $F_1 \cup F_2$ n'est pas en général un sev. Nous allons voir maintent une nouvelle opération sur les espaces vectoriels.

**Définition :** Pour $F_1$ et $F_2$ sev de $E$, on pose

$$F_1 + F_2 = \{\vec{x} \in E,\ \exists \vec{x}_1 \in F_1,\ \exists \vec{x}_2 \in F_2, \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2\}$$

appelé somme de $F_1$ et $F_2$ et noté $F_1 + F_2$.

**Proposition :** $F_1 + F_2$ est un sev de $E$ et même $F_1 + F_2 = \mathrm{Vect}(F_1 \cup F_2)$.

Démonstration

**Définition :** On dit que la somme $F_1 + F_2$ de deux sev $F_1$ et $F_2$ est **directe** si $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$. On note alors

$$F_1 + F_2 = F_1 \oplus F_2.$$

**Proposition :**

$$\begin{array}{rcll} F_1 + F_2 \text{ est directe} & \iff & F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\} & (1) \\ & \iff & \forall \vec{x} \in F_1 + F_2,\ \exists!(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in F_1 \times F_2, \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 & (2) \\ & \iff & \left( \left.\begin{array}{c} \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \vec{0} \\ \vec{x}_1 \in F_1 \\ \vec{x}_2 \in F_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{x}_1 = \vec{x}_2 = \vec{0} \right) & (3) \end{array}$$

Démonstration

**Exemple** : Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on note $P$ l'ensemble des applications paires et $I$ l'ensemble des applications impaires. Alors

$$E = F \oplus I.$$

En effet, si $f \in P \cap I$, on a , pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = f(x) = -f(x)$$

d'où $f(x) = 0$. Cela démontre $P \cap I = \{0\}$.

Par ailleurs, toute fonction $f \in E$ s'écrit $f = u + v$ avec

$$\begin{aligned} u(x) &= \tfrac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big) \in P \\ v(x) &= \tfrac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big) \in I. \end{aligned}$$

**Définition :** Soit $E$ un espace vectoriel et $F, G, H$ trois sev de $E$. On dit que $F$ et $G$ sont **supplémentaires** dans $H$ ou que $G$ est un **supplémentaire** de $F$ dans $H$ si

$$H = F \oplus G.$$

Si on parle "d'un supplémentaire de $F$" sans autre précision, cela veut dire un supplémentaire de $F$ dans $E$.

**Exemple** : On a vu juste avant que $P$ et $I$ sont supplémentaires (dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$).

**Théorème :** Dans l'espace vectoriel $E$, tout sev $F$ admet un supplémentaire c'est à dire qu'il existe un sev $G$ tel que $E = F \oplus G$.

Démonstration

**Corollaire :** Soient $F$ et $H$ deux sev de l'espace vectoriel $E$ avec $F \subset H$. Alors $F$ admet un supplémentaire dans $H$.

**Proposition :** Si $E = F \oplus G$, $\mathcal{F}$ base de $F$ et $\mathcal{G}$ base de $G$, alors $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est une base de $E$.
Réciproquement, si on peut trouver $\mathcal{F}$ base de $F$ et $\mathcal{G}$ base de $G$ telles que $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est une base de $E$, alors $E = F \oplus G$.

**Théorème :** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie, $F$ et $G$ deux sev de $E$. Alors

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Par conséquent :

$$F + G \text{ directe} \iff \dim(F + G) = \dim F + \dim G.$$

Démonstration

**Corollaire :** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie, $F$ et $G$ deux sev de $E$. Alors

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} E = F + G \\ F \cap G = \{\vec{0}\} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dim E = \dim F + \dim G \\ F \cap G = \{\vec{0}\} \end{cases} \iff \begin{cases} E = F + G \\ \dim E = \dim F + \dim G \end{cases}$$

## 9.16 Espaces vectoriels complexes.

Nous avons développé la théorie des espaces vectoriels où les deux opérations sur les vecteurs sont :
- L'addition.
- La multplication par un réel.

On pourrait remplacer la seconde opération par la multiplication par un nombre complexe. On parle alors d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. La théorie est en tout point identique à ce que nous avons vu en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.

**Exemples d'espaces vectoriels sur** $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{C}^n$ : Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$,
$$\alpha \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$
- $\mathbb{C}[X]$ ensemble des polynômes à coefficients complexes.
- $\mathcal{F}(U, \mathbb{C})$ ensemble des applications d'un ensemble $U$ dans $\mathbb{C}$.
- $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ ensemble des suites complexes.