M1 informatique : Bases du Traitement du Signal
Epreuve de contrôle continu - Durée : 1h30

17 novembre 2008

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Il est attendu la plus grande rigueur dans la rédaction des réponses, qui devront être claires, courtes et précises à la fois. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre qui vous conviendra, mais ne dispersez pas les réponses d'un même exercice dans la copie.

1 Questions de cours (6 points)

NB : Ces questions appellent des réponses assez courtes, mais clairement justifiées.

a) La figure 1 représente trois signaux temporels numérotés 1 à 3 (ligne du haut) et trois densités spectrales de puissance a, b et c (ligne du bas). Associez chaque spectre à un signal temporel, en expliquant vos choix.

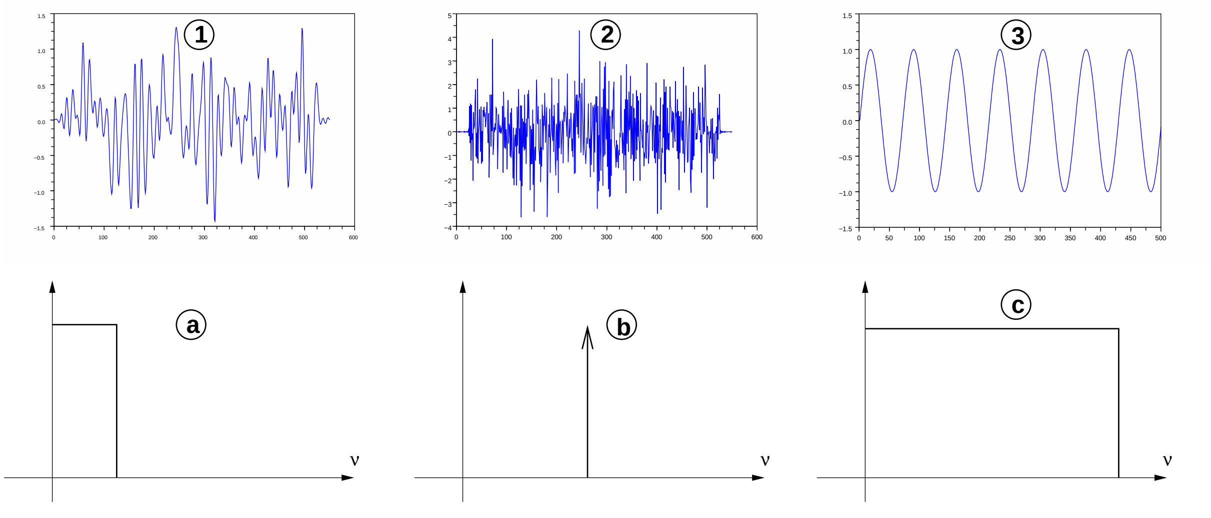

FIG. 1 –

b) Soient deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ apériodiques d'énergie finie. On note $\Gamma_{xy}(\tau)$ la corrélation entre x et y. Si $\Gamma_{xy}(\tau)$ est maximal en $\tau = 1$ s, qu'est-ce que cela signifie physiquement ?

c) Enoncer le théorème de Wiener-Khinchine.

d) Qu'est-ce que la réponse impulsionnelle d'un filtre ?

e) Soit un signal $x(t)$ aléatoire stationnaire à l'entrée d'un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$. On note $y(t)$ la sortie. Montrer que $\mathrm{E}[y(t)]$ est indépendant de t et que $\mathrm{E}[y] = H(0)\mathrm{E}[x]$, où $H(\nu)$ désigne la réponse fréquentielle du filtre.

2 Exercices

2.1 Echantillonnage (4 points)

Un son composé de deux sinusoïdes, respectivement à 100 et 500 Hz, est enregistré, numérisé et stocké (dans un fichier). La fréquence d'échantillonnage est de 600 Hz. Lorsqu'on rejoue ce fichier son, qu'entend-on ?

2.2 Filtrage (6 points)

Un signal $x(t)$, dont le spectre est représenté sur la figure 2, est filtré par un filtre dont la réponse fréquentielle $H(\nu)$ est représentée sur la figure 3. On note $y(t)$ le signal de sortie.

a) Dessiner le spectre de y.

b) Donner l'expression de $y(t)$.

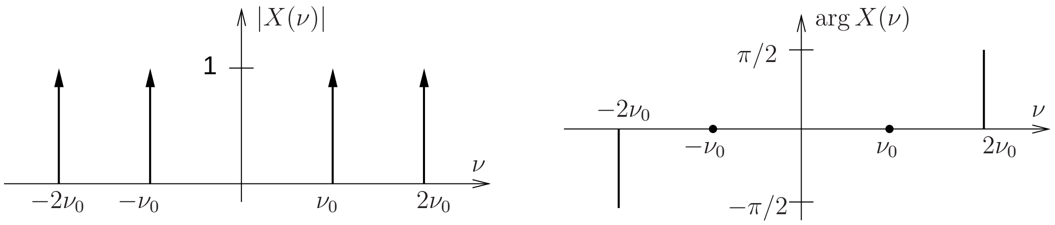

FIG. 2 – Spectre de x.

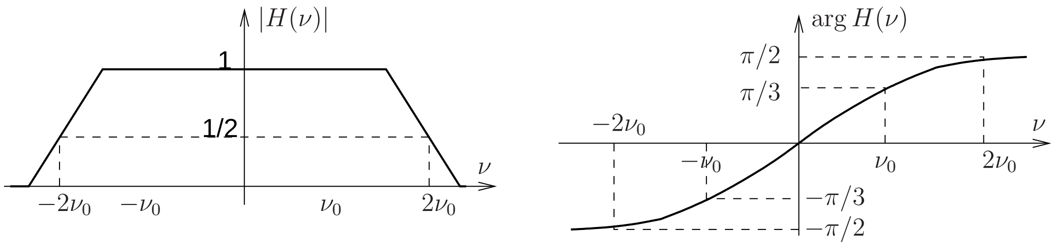

FIG. 3 – Réponse fréquentielle du filtre.

2.3 Signaux aléatoires (5 points)

Soit un signal aléatoire $x(t)$ qui peut prendre les valeurs ± 1 de manière équiprobable. Les instants de changement de signe sont aléatoires et le nombre $N(\tau)$ de changements de signe sur un intervalle de durée τ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda\tau$, où λ représente le nombre moyen de changements de signe par unité de temps.

On peut montrer que :

$$\mathrm{P}(N(\tau)\,\mathrm{pair}) = \frac{1 + 2\mathrm{e}^{-2\lambda\tau}}{2}$$

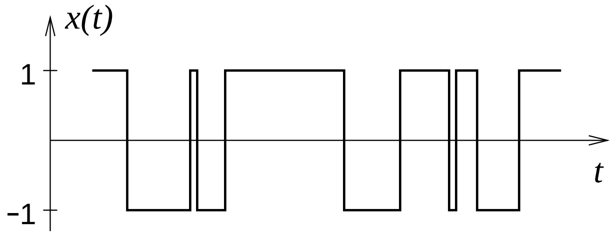

FIG. 4 – Exemple de réalisation de $x(t)$.

a) Pour deux instants t et $t-\tau$, exprimer en fonction de $\mathrm{P}(N(|\tau|)\,\mathrm{pair})$ et $\mathrm{P}(N(|\tau|)\,\mathrm{impair})$:

- $\mathrm{P}(s(t) = 1, s(t-\tau) = 1)$
- $\mathrm{P}(s(t) = -1, s(t-\tau) = -1)$
- $\mathrm{P}(s(t) = 1, s(t-\tau) = -1)$
- $\mathrm{P}(s(t) = -1, s(t-\tau) = 1)$.

b) Calculer l'autocorrélation de x, $\Gamma_x(t, t-\tau)$. Le signal x est-il stationnaire ?

3 Formulaire

Pour deux fonctions f et g,

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Trigonométrie :

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}}{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}}{2\mathrm{j}}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} = \cos\alpha + \mathrm{j}\sin\alpha$$

Transformée de Fourier :

$$\mathrm{TF}[x(t)] = X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu t}\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{TF}^{-1}[X(\nu)] = x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu t}\mathrm{d}\nu$$

$$\mathrm{TF}[x(t) * y(t)] = TF[x(t)].TF[y(t)]$$

$$\mathrm{TF}[s(t-a)] = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu a}S(\nu)$$

$$\mathrm{TF}[s(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu_0 t}] = S(\nu - \nu_0)$$

$$\mathrm{TF}[s^{(n)}(t)] = (\mathrm{j}2\pi\nu)^n S(\nu)$$

$$\delta(t) = \mathrm{TF}^{-1}[1]$$

$$\delta(\nu) = \mathrm{TF}[1]$$

$$\mathrm{TF}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu_0 t}] = \delta(\nu - \nu_0)$$

Durée utile T d'un signal réel $s(t)$:

$$\left(\frac{T}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 s(t)^2 \mathrm{d}t$$

Largeur utile B du spectre du signal :

$$\left(\frac{B}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu^2 |S(\nu)|^2 \mathrm{d}\nu$$

Relation d'incertitude :

$$T.B \geq \frac{1}{\pi}$$

Soit $x(t)$ un signal apériodique d'énergie finie. Autocorrélation de $x(t)$:

$$\Gamma_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)\mathrm{d}t$$

Sa transformée de Fourier : $\mathrm{TF}[\Gamma_x(\tau)] = |X(\nu)|^2$
Théorème de Parseval :

$$E = \Gamma_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 \mathrm{d}\nu$$

Pour $s(t)$ T_0-périodique, avec $T_0 = 1/\nu_0$:

$$s(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n\nu_0 t}, \quad \text{avec} \ : \quad c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n\nu_0 t}\mathrm{d}t$$

$$\gamma_s(\nu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 \delta_{n\nu 0}(\nu) \quad \text{et} \quad P = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |s(t)|^2 \mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$$

Pour $s(t)$ aléatoire stationnaire :

$$\Gamma_s(\tau) = \mathrm{E}[s(t)s(t-\tau)]$$
$$\gamma_s(\nu) = \mathrm{TF}[\Gamma_s(\tau)]$$
$$P = \mathrm{E}[|s(t)|^2] = \Gamma_s(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_s(\nu)\mathrm{d}\nu$$

Convolution :

$$x * y = y * x$$
$$x * \delta = x$$
$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

Pour un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$, réponse $y(t)$ à une entrée $x(t)$:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)x(t-\theta)\mathrm{d}\theta$$

Pour $x(t)$ signal déterministe :

$$Y(\nu) = H(\nu)X(\nu)$$

Pour x processus aléatoire stationnaire,

$$\mathrm{E}[y] = H(0)\mathrm{E}[x]$$
$$\gamma_y(\nu) = |H(\nu)|^2 \gamma_x(\nu)$$

Pour deux événements A et B,

$$\mathrm{P}(A, B) = \mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B)$$

Pour une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans un ensemble discret $\{X_1, X_2, X_3, ..., X_n\}$,

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} X_i \mathrm{P}(X_i)$$