M1 informatique : Bases du Traitement du Signal
Examen 2e session - Durée : 2h

9 juin 2009

Documents et calculatrices autorisés, téléphones interdits.

Les exercices peuvent être traités dans l'ordre qui vous conviendra, mais ne dispersez pas les réponses d'un même exercice dans la copie.

1 Questions de cours (7 points)

NB : Ces questions appellent des réponses assez courtes, mais clairement justifiées.

a) La figure 1 représente trois signaux temporels numérotés 1 à 3 (ligne du haut) et trois densités spectrales de puissance a, b et c (ligne du bas). Associez chaque spectre à un signal temporel, en expliquant vos choix.

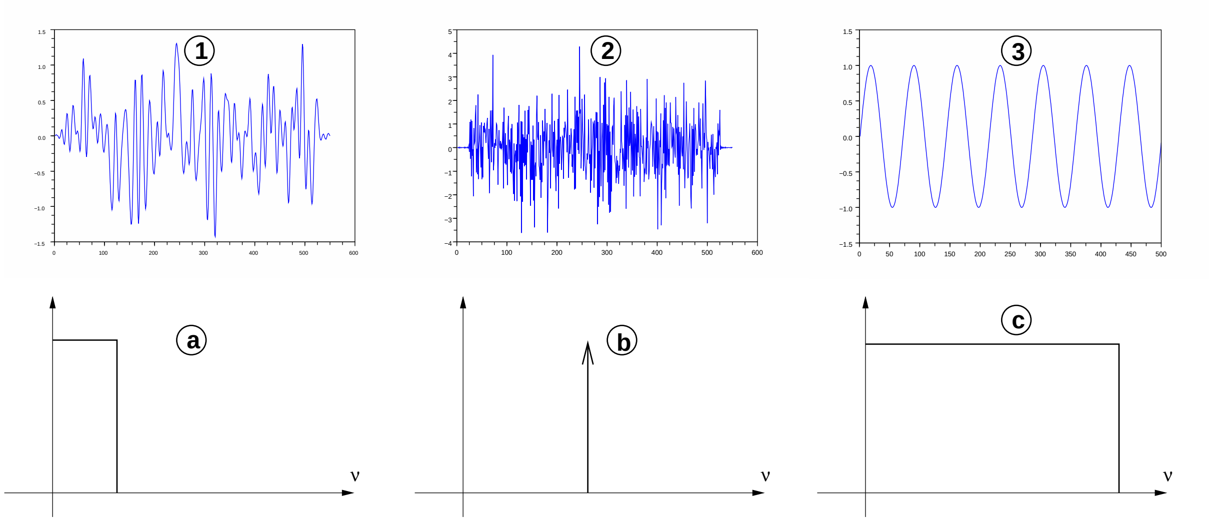

FIGURE 1 –

b) Soient deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ apériodiques d'énergie finie. On note $\Gamma_{xy}(\tau)$ la corrélation entre x et y. Si $\Gamma_{xy}(\tau)$ est maximal en $\tau = 1$ s, qu'est-ce que cela signifie physiquement ?

c) Qu'est-ce qu'un processus stationnaire ?

d) Un convertisseur numérique-analogique doit généralement fonctionner en temps réel et de manière causale, c'est-à-dire que la sortie à un instant t_0 ne doit pas dépendre des échantillons postérieurs à t_0. La formule de reconstruction parfaite d'un signal analogique $x(t)$ à partir de sa version échantillonnée est-elle utilisable dans ce cas ?

e) Qu'est-ce que la réponse impulsionnelle d'un filtre ?

f) La synthèse d'un filtre RIF par la méthode du fenêtrage induit d'une part le phénomène de Gibbs (ondulations de la réponse fréquentielle) et d'autre part une bande de transition entre la bande passante et la bande atténuée. A quelles caractéristiques de la fenêtre utilisée ces deux phénomènes sont-ils respectivement liés ?

g) La méthode de l'échantillonnage fréquentiel permet de synthétiser des filtres RIF de longueur aussi petite que souhaité. Quel risque cette méthode présente-t-elle si la longueur choisie est trop faible ?

2 Exercices

Rappel : Toutes les réponses doivent être justifiées.

2.1 Analyse d'un filtre numérique (6 points)

a) Donner l'équation aux différences du filtre représenté sur la figure 2. Est-ce un filtre à réponse impulsionnelle finie ou infinie ?

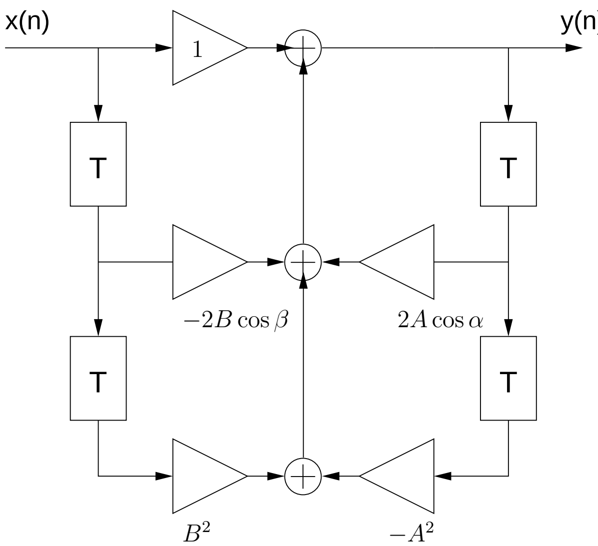

FIGURE 2 –

b) Calculez la fonction de transfert $H(z)$ du filtre.

c) Quels sont les pôles et les zéros du filtre ? A quelle condition le filtre est-il stable ? Dessinez le diagramme pôles-zéros dans le cas où $A = B = 0.9$, $\alpha = \pi/3$ et $\beta = 2\pi/3$.

d) Esquissez le module de la réponse fréquentielle dans ce cas.

2.2 Analyse spectrale (3 points)

Soit un signal constitué de 3 sinusoïdes, dont le spectre théorique est représenté sur la figure 3 (fréquences positives uniquement). Ces sinusoïdes ont pour fréquences respectives $\nu_1 = 5000$ Hz, $\nu_2 = 5150$ Hz et $\nu_1 = 5300$ Hz.

Le signal est échantillonné pendant 35 ms, à 16 kHz. De combien d'échantillons dispose-t-on ainsi ? On souhaite visualiser son spectre à partir de cette séquence, par FFT (transformée de Fourier rapide). Comment s'y prendre, pour avoir une résolution suffisante en amplitude et en fréquence ? **(justifiez votre réponse)**

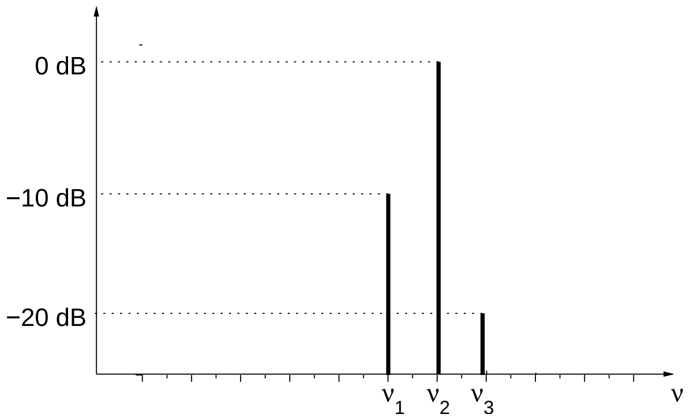

FIGURE 3 – Spectre de trois sinusoïdes

2.3 Echantillonnage (5 points)

Dans un fichier son au format .wav, les échantillons sont généralement codés sur 16 bits. On a donc 2^{16} valeurs possibles, les entiers entre -2^{15} et $2^{15} - 1$. On souhaite sous-quantifier d'un facteur K ce signal, c'est-à-dire diviser par K le nombre de valeurs possibles, de manière à réduire le nombre de bits de codage de $\log_2 K$. Pour cela, on arrondit toutes les valeurs d'un intervalle $[nK - \frac{K}{2}, nK + \frac{K}{2}]$ à nK (n entier).

On note x le signal original et x_Q le signal sous-quantifié. Soit f_x et f_{xQ} les histogrammes respectifs de ces deux signaux. Pour chaque entier i, $f_x(i)$ (respectivement $f_{xQ}(i)$) est le nombre d'échantillons de x (resp. de x_Q) prenant la valeur i.

On peut noter que $f_{xQ}(i)$ vaut 0 pour tout i non multiple de K et que $\forall\, n \in \mathbb{Z}$:

$$f_{xQ}(nK) = \sum_{i=\lfloor nK - \frac{K}{2} + 1 \rfloor}^{\lfloor nK + \frac{K}{2} \rfloor} f_x(i) \tag{1}$$

Cela peut s'exprimer par une opération dite "échantillonnage de surface" de l'histogramme du signal original, illustrée sur la figure 4 pour $K = 4$:

1. convolution de f_x par la fenêtre rectangulaire discrète r de longueur K ;
2. multiplication du résultat par e, un train d'impulsions unité espacées de K.

L'histogramme du signal sous-quantifié (Fig 4d) vaut donc :

$$f_{xQ}(i) = [f_x(i) * r(i)].e(i) \tag{2}$$

On appelle "fonction caractéristique" d'un signal la transformée de Fourier de son histogramme. En notant $\Phi_x(\nu)$ et $\Phi_{xQ}(\nu)$ les fonctions caractéristiques respectives de x et x_Q, la relation précédente est équivalente, dans le domaine fréquentiel, à :

$$\Phi_{xQ}(\nu) = [\Phi_x(\nu)\, R(\nu)] * E(\nu) \tag{3}$$

Comme l'illustre la figure 5, sous-quantifier d'un facteur K revient à répliquer K fois la fonction caractéristique multipliée par $R(\nu)$, avec une périodicité $1/K$.

a) A quelle condition peut-on retrouver l'histogramme du signal original à partir de celui du signal sous-quantifié ?

b) Tracer la réponse fréquentielle (en module) du filtre permettant de retrouver l'histogramme original.

c) La sous-quantification se traduit par un sous-échantillonnage de de l'histogramme. En faisant l'analogie avec le théorème de Shannon, comment pourrait-on appeler $1/K$? En quoi ce sous-échantillonnage diffère-t-il de l'échantillonnage temporel ?

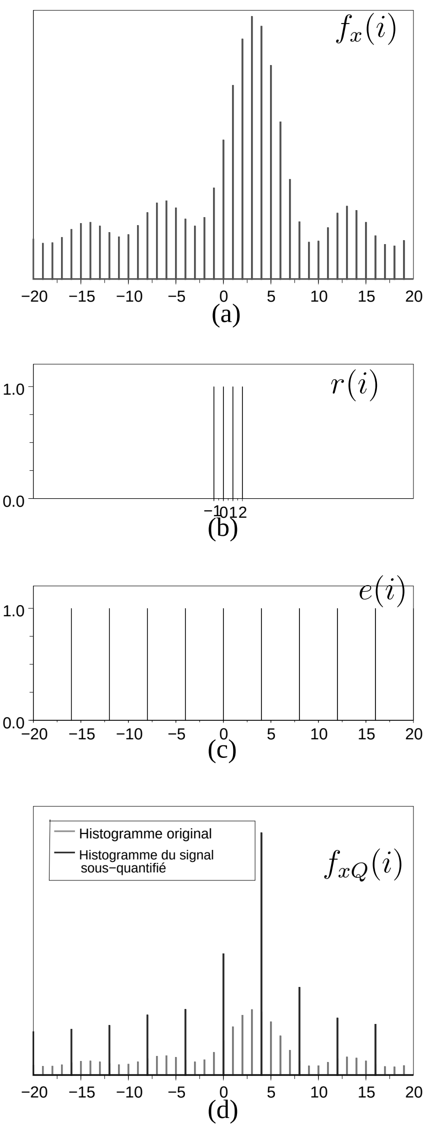

FIGURE 4 – Echantillonnage de surface : (a) histogramme original $f_x(i)$; (b) filtre rectangulaire $r(i)$;(c) train d'impulsions $e(i)$; (d) histogramme du signal sous-quantifié $f_{xQ}(i)$

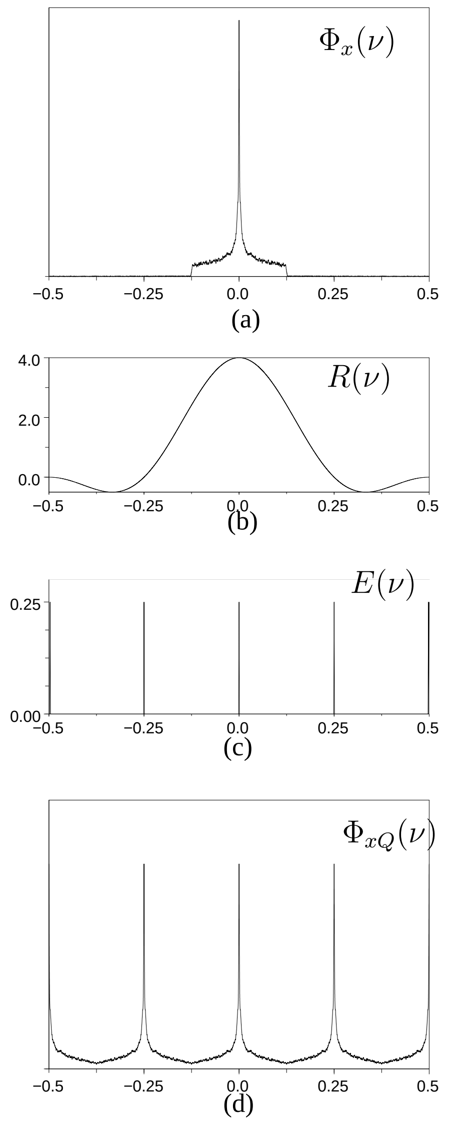

FIGURE 5 – Echantillonnage de surface dans le domaine spectral

3 Annexe

Type de fenêtre	Atténuation du lobe secondaire relativement au lobe principal	Largeur du lobe principal en fréquence normalisée
Recangulaire	-13 dB	$2/N$
Triangle (Bartlett)	-25 dB	$4/N$
Hanning	-31 dB	$4/N$
Hamming	-41 dB	$4/N$
Blackman	-57 dB	$6/N$

TABLE 1 – Caractéristiques des principales fenêtres