M1 info : Bases du Traitement du Signal et des images
Examen de 2e session - Durée : 2h

13 juin 2012

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Les quatre parties peuvent être traités dans l'ordre qui vous conviendra, mais ne dispersez pas les réponses d'une même partie dans la copie.

1 QCM signal (4 points)

Cochez toutes les affirmations exactes. N'oubliez pas de rendre ce QCM avec votre copie, ***sans aucun signe distinctif****.*

a) L'énergie d'un signal représenté dans le domaine temporel est

☐ **supérieure à celle calculée à partir de la représentation spectrale.**
☐ **inférieure à celle calculée à partir de la représentation spectrale.**
☐ **égale à celle calculée à partir de la représentation spectrale.**

b) Le spectre d'un signal périodique est

☐ **périodique.**
☐ **uniquement constitué de raies.**
☐ **constant.**

c) La formule de reconstruction d'un signal analogique $x(t)$ à partir de sa version échantillonnée

☐ **est une approximation, car il n'est pas possible de retrouver exactement le signal analogique original.**
☐ **nécessite de disposer de tous les échantillons passés et futurs pour calculer une valeur $x(t)$ à un instant t donné.**
☐ **permet de reconstruire $x(t)$ au fur et à mesure qu'on reçoit les échantillons.**

d) Le module de la transformée de Fourier d'une fonction porte (fenêtre rectangulaire) de largeur T est

☐ **une fonction porte de largeur $1/T$.**
☐ **une fonction $|\mathrm{sinc}|$ de largeur de lobe principal $2/T$.**
☐ **une fonction périodique de période $1/T$.**

2 Image (7 points)

Rappel : Toutes les réponses doivent être clairement rédigées et justifiées.

Sur la figure suivante, expliquez le type d'opérateurs de traitement d'images qui ont été appliqués sur l'image originale (A) pour obtenir les images B,C,D et E. Proposez une légende détaillée pour les images B, C, D, E.

- Pouvez-vous expliquer quel type d'information vous pouvez déduire de ces images ?
- Quel(s) type(s) de traitement proposeriez-vous pour extraire les contours ? pour éliminer le bruit ? pour sélectionner l'os fémoral ?

3 Analyse spectrale numérique (6 points)

La figure 2 représente sur l'intervalle de fréquences normalisées $[0; 1/2]$ le spectre d'amplitude d'un signal x échantillonné, constitué de 2 sinuoïdes d'amplitudes respectives 10 et 1, de fréquences normalisées respectives $f_1 = 1/8$ et $f_2 = 1/8 + 1/32$. On prélève N échantillons de ce signal pour en faire une analyse spectrale numérique. La figure 3 représente le spectre du signal tronqué $\tilde{x}$, noté $\tilde{X}(f)$, et sa transformée de Fourier discrète (TFD), notée $\tilde{X}[k]$.

a) Pour faire apparaître nettement les 2 raies spectrales, on envisage 3 possibilités :

- compléter $\tilde{x}$ par des zéros (zéro-padding) avant le calcul de la TFD ;
- augmenter N ;
- remplacer le fenêtrage rectangulaire par un fenêtrage de Hamming.

Indiquez quelle(s) solution(s) est(sont) appropriée(s) et sous quelles conditions, en justifiant **précisément** pourquoi.

b) On sous-échantillonne le signal x d'un facteur 2, c'est-à-dire qu'on prélève un échantillon sur 2 pour faire un signal y tel que $y(n) = x(2n)$. Montrer que :

$$Y(f) = \frac{1}{2}\Big(X\Big(\frac{f}{2}\Big) + X\Big(\frac{f}{2} - \frac{1}{2}\Big)\Big)$$

Conseil : partir du membre de droite de l'égalité.

c) Le spectre de y est représenté sur la figure 4. En partant de la solution que vous avez retenue à la question a, pourquoi peut-on diviser par 2 le nombre d'échantillons prélevés pour l'analyse spectrale ?

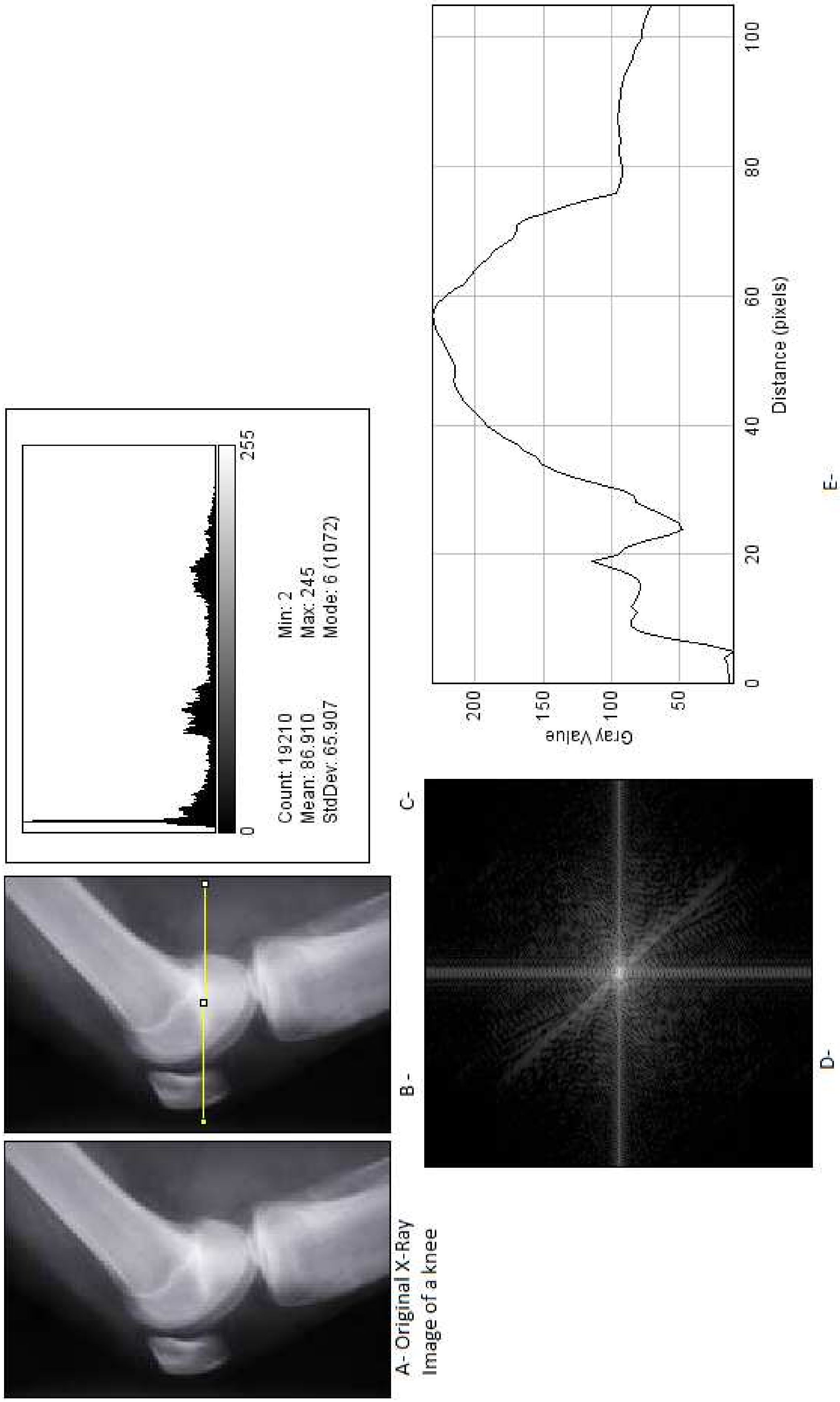

FIG. 1 – Figure de l'exercice image.

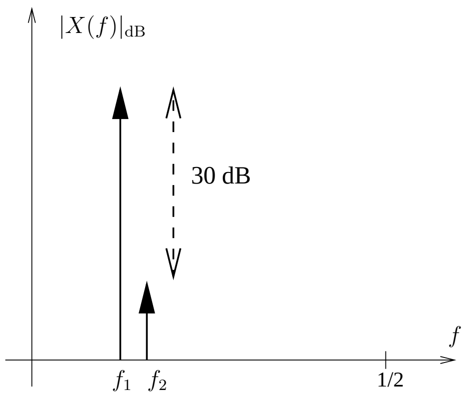

FIG. 2 – Spectre d'amplitude de x.

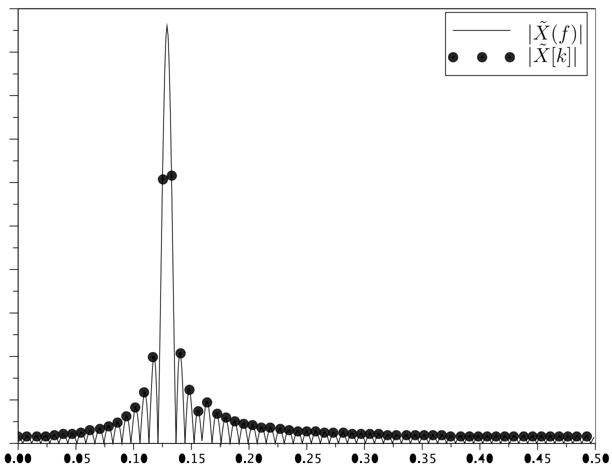

FIG. 3 – TFTD et TFD de $\tilde{x}$.

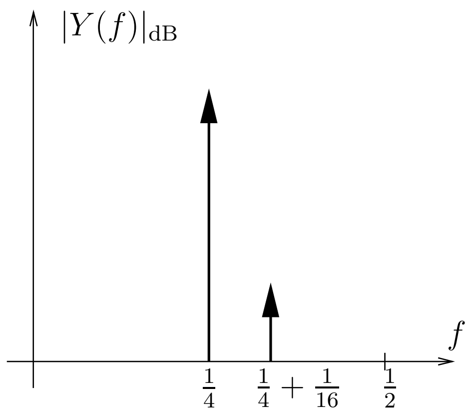

FIG. 4 – Spectre d'amplitude de y.

4 Filtrage numérique (4 points)

Soit un filtre numérique de réponse fréquentielle $H(f)$ représentée en module sur la figure 5, défini par l'équation aux différences :

$$y(n) = x(n) + x(n-8)$$

où x et y désignent respectivement l'entrée et la sortie du filtre.

a) Calculez la fonction de transfert $H(z)$. Quel est le nombre maximal de pôles ? de zéros ? En vous aidant de la figure 5, dessinez le diagramme pôles-zéros. Ce filtre est-il stable ?

b) Soit un signal discret x défini par :

$$x(n) = \cos(2\pi f_0 n) + \cos(2\pi \times 3 f_0 n) + \cos(2\pi \times 5 f_0 n) + \cos(2\pi \times 7 f_0 n)$$

avec $f_0 = 1/16$.

Dessinez son spectre d'amplitude. Sans faire de calcul, quelle sera la réponse du filtre au signal x ?

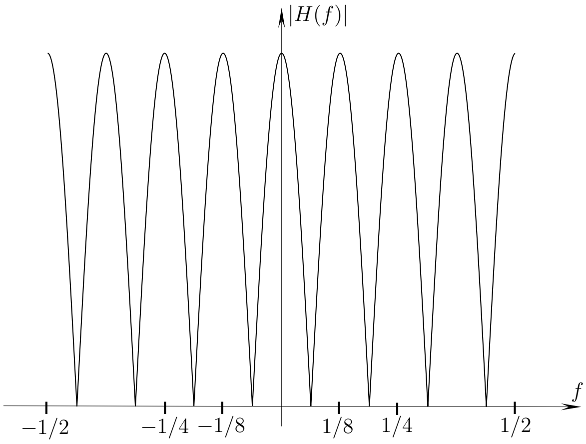

FIG. 5 – Réponse fréquentielle du filtre (en module).

5 Formulaire

Trigonométrie :

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}}{2}, \qquad \sin\alpha = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}}{2\mathrm{j}}, \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} = \cos\alpha + \mathrm{j}\sin\alpha$$

Transformée de Fourier :

$$\begin{aligned}
\mathrm{TF}[x(t)] = X(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu t}\mathrm{d}t \\
\mathrm{TF}^{-1}[X(\nu)] = x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu t}\mathrm{d}\nu \\
\mathrm{TF}[x(t) * y(t)] &= TF[x(t)].TF[y(t)] \\
\mathrm{TF}[s(t-a)] &= \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu a}S(\nu) \\
\mathrm{TF}[s(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu_0 t}] &= S(\nu - \nu_0) \\
\mathrm{TF}[s^{(n)}(t)] &= (\mathrm{j}2\pi\nu)^n S(\nu) \\
\delta(t) &= \mathrm{TF}^{-1}[1] \\
\delta(\nu) &= \mathrm{TF}[1] \\
\mathrm{TF}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu_0 t}] &= \delta(\nu - \nu_0)
\end{aligned}$$

Durée utile T d'un signal réel $s(t)$:

$$\left(\frac{T}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 s(t)^2 \mathrm{d}t$$

Largeur utile B du spectre du signal :

$$\left(\frac{B}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu^2 |S(\nu)|^2 \mathrm{d}\nu$$

Relation d'incertitude :

$$T.B \geq \frac{1}{\pi}$$

Soit $x(t)$ un signal apériodique d'énergie finie. Autocorrélation de $x(t)$:

$$\Gamma_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)\mathrm{d}t$$

Sa transformée de Fourier : $\mathrm{TF}[\Gamma_x(\tau)] = |X(\nu)|^2$
Théorème de Parseval :

$$E = \Gamma_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2\mathrm{d}\nu$$

Pour $s(t)$ T_0-périodique, avec $T_0 = 1/\nu_0$:

$$s(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n\nu_0 t}, \quad \text{avec} \ : \quad c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n\nu_0 t}\mathrm{d}t$$

Convolution :

$$x * y = y * x$$
$$x * \delta = x$$
$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$

Pour un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$, réponse $y(t)$ à une entrée $x(t)$:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)x(t-\theta)\mathrm{d}\theta$$

Pour $x(t)$ signal déterministe :

$$Y(\nu) = H(\nu)X(\nu)$$

Transformée de Fourier à temps discret :

$$S_e(\nu) = \mathrm{TFTD}(s[n]) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} s[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n T_e \nu}$$

Reconstruction parfaite d'un signal :

$$s(t) = T_e \sum_{n\in\mathbb{Z}} s[n]\mathrm{sinc}(\pi\nu_e t - \pi n)$$

Formule de Poisson :

$$S_e(\nu) = \nu_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} S(\nu - k\nu_e)$$

Réponse fréquentielle :
– Pour un filtre de réponse impulsionnelle $h(n)$, réponse fréquentielle :

$$H(f) = \mathrm{TFTD}[h(n)]$$

– Relation entrée-sortie :

$$y(n) = h(n) * x(n) \Leftrightarrow Y(f) = H(f)X(f)$$

Transformée en Z d'un signal discret $x(n)$:

$$X(z) = \mathrm{TZ}[x(n)] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) z^{-n}$$

Théorème du retard :

$$\mathrm{TZ}[x(n-k)] = z^{-k}\mathrm{TZ}[x(n)]$$

La TZ transforme le produit de convolution en produit simple :

$$\mathrm{TZ}[x(n) * y(n)] = X(z)Y(z)$$

$\mathrm{TFTD}[x(n)] = \mathrm{TZ}[x(n)]$ calculée en $z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f}$
Soit un signal discret $x(n)$ de durée finie N :

$$x(n) = 0 \quad \forall\, n < 0 \text{ ou } n \geq N$$

– Transformée de Fourier à temps discret (TFTD) de x :

$$X(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n f}$$

– Transformée de Fourier discrète (TFD) :

$$\mathrm{TFD}[x(n)] = X[k] = X(f = \frac{k}{N}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi k n}{N}} \quad \forall\, 0 \leq k \leq N-1$$

TFD inverse :

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi k n}{N}} = \mathrm{TFD}^{-1}[X[k]] \quad \forall\, 0 \leq n \leq N-1$$

Types de fenêtres et largeur du lobe principal en fréquence normalisée :

Fenêtre	*Largeur du lobe principal (fréq. normalisée)*	*Ecart d'amplitude lobes principal/secondaire (dB)*
Rectangle	$2/N$	13
Triangle	$4/N$	25
Hanning	$4/N$	31
Hamming	$4/N$	41
Blackman	$6/N$	57