# M1 IPCC : Traitement du Signal 1
# TD2 : Corrélation et densité spectrale de puissance

## 1 Modulation de fréquence binaire

On considère la transmission de données binaires par modulation de fréquence à 2états. Chaque bit est émis pendant une durée $T$ *via* l'un des deux signaux suivants :

$$
\begin{aligned}
s_0(t) &= h(t)\cos(2\pi f_0 t) \text{ si le bit vaut } 0 && (1)\\
s_1(t) &= h(t)\cos(2\pi f_1 t) \text{ si le bit vaut } 1 && (2)
\end{aligned}
$$

$h$ étant la fonction porte, qui vaut 1 sur $[0; T]$ et 0 ailleurs (pour simplifier les calculs, on condidère ici que l'émission du bit considéré commence à $t = 0$).

On suppose que $f_0 \gg 1/T$, $f_1 \gg 1/T$ et $|f_0 - f_1| = 1/T$.

Le canal de communication est bruité, atténue le signal et le retarde, de sorte que le signal reçu a pour expression :

$$r(t) = a.h(t)\cos(2\pi f_i t - \theta) + b(t) \tag{3}$$

avec $i$ la valeur (inconnue) du bit émis.

La démodulation (identification du bit émis) est fondée sur un calcul de corrélation entre le signal reçu $r(t)$ et les différents signaux potentiellement émis $s_j(t)$.

A toutes fins utiles, quelques rappels de trigonométrie :

$$
\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a \sin b && (4)\\
\cos a \cos b &= (\cos(a+b) + \cos(a-b))/2\\
\sin a \cos b &= (\sin(a+b) + \sin(a-b))/2
\end{aligned}
$$

1. Montrer que la corrélation entre $r(t)$ et $s_j(t)$ s'exprime par :

$$\Gamma_j(t) = A_j(t)\cos(2\pi f_j t) + B_j(t)\sin(2\pi f_j t) \tag{5}$$

avec :

$$A_j(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(\tau)h(\tau - t)\cos(2\pi f_j \tau)\mathrm{d}\tau \text{ et } B_j(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(\tau)h(\tau - t)\sin(2\pi f_j \tau)\mathrm{d}\tau \tag{6}$$

2. Calculer $\Gamma_j(0)$ selon les 2 hypothèses : et $i \neq j$ et $i = j$.

3. Supposons que $\theta = 0$ (le canal n'introduit pas de déphasage). Comment déterminer le symbole émis ?

4. Que se passe-t-il si $\theta \neq 0$ ? Pourquoi dans ce cas la valeur de $\Gamma_j(0)$ ne permet pas de déterminer le signal émis ?

5. Dans ce cas général, c'est en fait la valeur de $A_j^2(0) + B_j^2(0)$ qui permet d'estimer le bit émis. Le vérifier en calculant cette valeur pour les 2 hypothèses $i = j$ et $i \neq j$.

# 2 Codage NRZ

Des données binaires peuvent être transmises en bande de base (sans modulation) en utilisant un code NRZ (non-retour à zéro) : chaque bit est émis pendant une durée $T_b$, par un signal $s(t)$ valant -1 pour 0, +1 pour 1. Si l'on note $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite des bits émis,

$$s(t) = S_n \in \{-1; +1\} \; \forall t \in [nT_b; (n+1)T_b] \tag{7}$$

On considère généralement que les $S_n$ sont indépendants et identiquement distribués (autant de +1 que de -1), ce qui implique que $\overline{S_n S_{n+k}} = 1$ pour $k = 0$, 0 sinon.

L'autocorrélation de $s$ est définie par :

$$\Gamma_s(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s(t)s(t-\tau) \tag{8}$$

En segmentant l'intégrale bit par bit, on obtient :

$$\Gamma_s(\tau) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{-N/2}^{N/2-1} \int_{nT_b}^{(n+1)T_b} s(t)s(t-\tau)\mathrm{d}t = \overline{\int_{nT_b}^{(n+1)T_b} s(t)s(t-\tau)\mathrm{d}t} \tag{9}$$

1. Pour $\tau \leq T_b$, en décomposant judicieusement l'intégrale et en utilisant la relation (7), calculer $\Gamma_s(\tau)$ (voir figure ci-dessous).

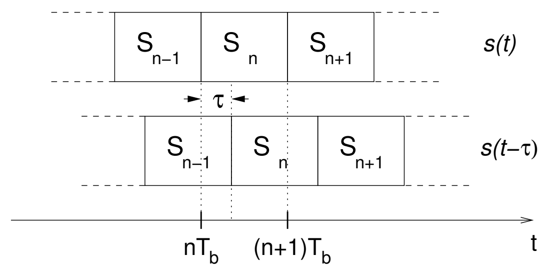


FIG. 1 – Séquences $(S_n)$ décalées de $\tau$

2. Supposons maintenant que $\tau \geq T_b$. En exprimant $\tau$ sous la forme $\tau = kT_b + \theta$, avec $k$ entier $\geq 1$ et $\theta \leq T_b$, calculer $\Gamma_s(\tau)$ (on pourra s'aider d'une figure similaire à la précédente). Tracer alors $\Gamma_s(\tau)$ pour $\tau \in \mathbb{R}$.

3. La figure 2 représente une fonction triangle et sa transformée de Fourier, qui a pour expression :

$$\gamma_T(\nu) = T\mathrm{sinc}^2(\nu T) = T\left(\frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu T}\right)^2 \tag{10}$$

En déduire la densité spectrale de puissance d'un code NRZ de durée de bit $T_b$. En considérant qu'une ligne téléphonique a une bande passante de 3400 Hz, quel est le débit maximal de transmission des données par un codage NRZ sur une telle ligne ?

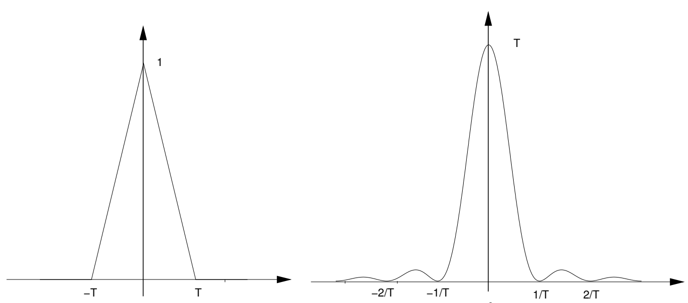


FIG. 2 – Fonction triangle et sa transformée de Fourier

**Sources**


- A. Quinquis, "Signal déterministe, signal aléatoire : exercices et problèmes corrigés", Hermès, Paris, 1999.
- ENST Bretagne, TD 3A Signal et Communications, 1998.