

M1 IPCC : Traitement du Signal 1

TD4 : Systèmes dynamiques

1 Mouvement de pompage sur un véhicule automobile

La caisse d'un véhicule peut avoir trois types de mouvement : le tangage, le roulis et le pompage, qui est une translation verticale. Nous étudions ici uniquement le pompage, considéré comme découplé des deux autres mouvements. Sous cette hypothèse, le véhicule peut être modélisé selon le schéma de la figure 1.

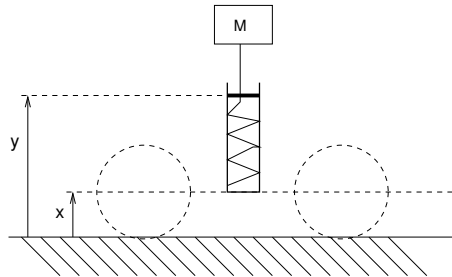


FIG. 1 – Modélisation du véhicule

Le ressort modélisant les suspensions, de longueur au repos L_0 , a pour raideur k . Le mouvement des pistons crée une force de frottement proportionnelle à leur vitesse, de coefficient α . Si l'on note $x(t)$ le niveau de l'essieu, $y(t)$ le niveau de la caisse au point d'attache de la suspension et M la masse du véhicule, le mouvement de pompage est alors décrit par l'équation :

$$My''(t) = -Mg - k(y(t) - x(t) - L_0) - \alpha(y'(t) - x'(t)) \quad (1)$$

Au départ, $Mg = -k(y(0) - x(0) - L_0)$. L'équation (1) devient donc :

$$My''(t) = -k(y(t) - x(t) - y(0) - x(0)) - \alpha(y'(t) - x'(t)) \quad (2)$$

En se plaçant dans les référentiels d'origines respectives $x(0)$ pour x et $y(0)$ pour y , $y(t)$ et $x(t)$ sont alors reliés par l'équation :

$$My''(t) + \alpha y'(t) + ky(t) = \alpha x'(t) + kx(t) \quad (3)$$

Cette équation définit le véhicule comme un système dynamique dont l'entrée est le niveau du sol $x(t)$ et la sortie le niveau de la caisse $y(t)$. On suppose par la suite que $M = 1$ kg.

1. Quelle est la fonction de transfert du système ? En déduire la réponse impulsionnelle. D'où vient (physiquement) l'amortissement de cette réponse impulsionnelle ?

2. Esquisser la réponse fréquentielle du système.

3. Le sol a un profil sinusoïdal, de période d_0 et d'amplitude x_0 . Exprimer $x(t)$ en fonction de la vitesse v du véhicule, supposée constante. Déterminer la vitesse de résonance du véhicule, *i.e.* la vitesse pour laquelle le pompage sera maximal. Application numérique : $k = 200$ N/m ; $\alpha = 3$ N/m.s ; $d_0 = 40$ cm. Quelle sera alors l'amplitude du pompage ?

2 Modélisation du conduit vocal

Pour un phonème non nasal, le conduit vocal peut être modélisé par une succession de tubes de longueurs et sections variables, comme représenté sur la figure 2. Le conduit vocal est un système acoustique dont l'entrée est soit l'onde glottique (souffle d'air périodique rythmé par les cordes vocales) pour les voyelles, soit un souffle d'air turbulent pour les consonnes.

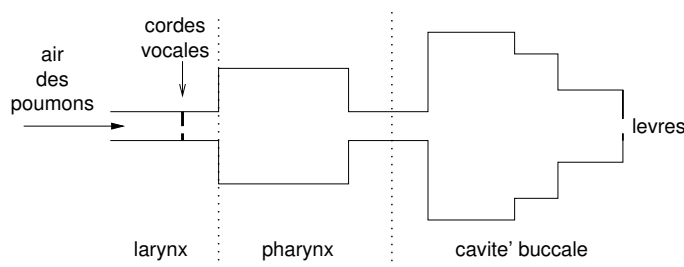


FIG. 2 – Modélisation du conduit vocal

2.1 Propagation de l'air dans un tube

La propagation de l'air dans un tube cylindrique à parois rigides peut être modélisée par les équations suivantes, qui relient la pression de l'air $p(x, t)$ en une abscisse x à un instant t et la vitesse de l'air $u(x, t)$:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\rho_0}{A} \frac{\partial u}{\partial t} + Ru \quad (4)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{A}{\rho_0 c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + Gp \quad (5)$$

où ρ_0 désigne la densité moyenne de l'air, A la section du tube et c la célérité du son dans l'air (354 m/s à 37°C). Le terme Ru est lié aux forces de frottement dues à la viscosité de l'air, avec :

$$R = \frac{S}{A} \sqrt{\frac{\rho_0 \mu \omega}{2}} \quad (6)$$

où S est la circonférence de la section du tube, μ le coefficient de viscosité de l'air et $\omega = 2\pi\nu$ la pulsation de l'onde acoustique. Le terme G_p correspond à des transfert de chaleur dans la masse d'air, avec :

$$G = \frac{\eta - 1}{\rho_0 c^2} \sqrt{\frac{\lambda \omega}{2\rho_0 c_p}} \quad (7)$$

où η désigne la constante adiabatique de l'air, λ le coefficient de conductibilité de l'air et c_p la chaleur spécifique à pression constante. Les autres termes des équations (dérivées) correspondent à des phénomènes purement vibratoires.

En considérant le conduit vocal comme une succession de N tubes, la propagation de l'air peut être décrite de manière simplifiée par la mise en cascade de $N + 1$ systèmes dynamiques définis par les équations différentielles suivantes, dans lesquelles $e(t)$ et $s(t)$ désignent les pressions de l'air respectivement en entrée et en sortie du système :

$$e(t) = l_k C_k s''(t) + (l_k G_k + r_k C_k) s'(t) + (r_k G_k + 1) s(t) \quad \forall k = 1 \dots N \quad (8)$$

$$L_b e'(t) + R_b e(t) = (l_N + L_b) s'(t) + (r_N + R_b) s(t) \quad \text{pour } k = N + 1 \quad (9)$$

avec :

$$l_k = \frac{1}{2}(L_k + L_{k-1}) \text{ tel que } L_0 = 0 \text{ et } L_k = \frac{\rho_0 \Delta_k}{A_k} \quad \forall k = 1 \dots N \quad (10)$$

$$r_k = \frac{1}{2}(R_k + R_{k-1}) \text{ tel que } R_0 = 0 \text{ et } R_k = \frac{S_k}{A_k} \sqrt{\frac{\rho_0 \mu \omega_0}{2}} \quad \forall k = 1 \dots N \quad (11)$$

$$C_k = \frac{A_k \Delta_k}{\rho_0 c^2} \quad (12)$$

$$G_k = \frac{\eta - 1}{\rho_0 c^2} \sqrt{\frac{\lambda \omega_0}{2\rho_0 c_p}} \quad (13)$$

$$R_b = \frac{\rho_0 \omega_0^2}{4\pi^2 c} \quad (14)$$

$$L_b = \frac{8\rho_0}{3\pi^3 a} \quad (15)$$

avec A_k , S_k et Δ_k respectivement la section, la circonférence de la section et la longueur du $k^{\text{ème}}$ tube, a le rayon d'ouverture de la bouche et ω_0 fixé à 1 kHz

a) Donner la fonction de transfert $H_k(p)$ de chaque système.

b) En déduire sa réponse fréquentielle, en supposant, pour $k = 1 \dots N$, que le discriminant du dénominateur est strictement négatif. Tracer l'allure de cette réponse fréquentielle.

c) Quelle est la réponse fréquentielle du système résultant de la mise en cascade des $N + 1$ systèmes ?

2.2 Lien entre le modèle acoustique et le spectre de la voix

Le spectre d'amplitude du phonème [a] (voir fig. (3)) présente des formants (maxima) aux fréquences 640, 1250, 2090, 3530 et 4080 Hz. Combien de tubes faut-il pour modéliser la forme du conduit vocal lors de la prononciation d'un [a] ? Si l'on utilise des tubes à section circulaire de même longueur, comment trouver le rayon de la section de chaque tube à partir du spectre donné ? (inutile d'aller jusqu'au bout des calculs)

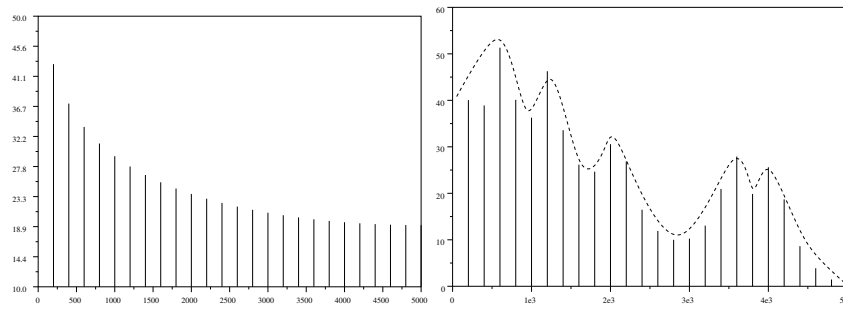


FIG. 3 – Spectres de la source glottique (à g.) et de la sortie du conduit vocal (à d.) pour un [a]

3 Sources

- ENST Bretagne, TD 1A Traitement du Signal, 1995.
- J.C. Malherbe, “Aspects acoustiques de la production de la parole”, poly DEA STIR, Université Rennes 1, 1998.
- J.L. Flanagan, C.H. Coker, L.R. Rabiner, R.W. Schafer, N. Umeda, “Synthetic voices for computers”, IEEE Spectrum, octobre 1970, Vol. 7, pp. 22-45.