M1 info : Bases du Traitement du Signal
TD4 : Systèmes analogiques

1 Réponse d'un filtre à une sinusoïde

Soit un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ et de réponse fréquentielle $H(\nu)$. On considère à l'entrée de ce filtre le signal $x(t) = x_0 e^{j2\pi\nu_0 t}$. Montrer que $y(t) = H(\nu_0)x(t)$ de deux manières :
- à partir de $y(t) = h(t) * x(t)$;
- à partir de $Y(\nu) = H(\nu)X(\nu)$.

En déduire la réponse du filtre au signal $x(t) = x_0 \cos(2\pi\nu_0 t)$. Rappel : $H(-\nu_0) = H^*(\nu_0)$.

2 Filtre RC

Le circuit de la figure 1, alimenté par la tension $x(t)$, est un système dynamique d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$, régi par l'équation suivante :

$$RCy'(t) + y(t) = x(t) \tag{1}$$

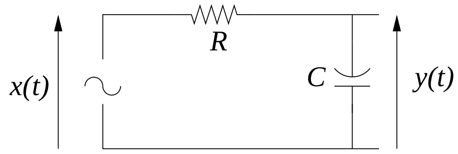

FIG. 1 – Circuit RC.

1) Donner la réponse fréquentielle $H(\nu)$ de ce filtre. Calculer son module et sa phase.

2) Après avoir déterminé le sens de variation de la fonction $|H(\nu)|$ et les asymptotes de $|H(\nu)|_{\mathrm{dB}}$ en $\nu = 0$ et $\nu \to \infty$, tracer son diagramme de Bode (axe des abscisses : $\log(\nu)$, axe des ordonnées : $|H(\nu)|_{\mathrm{dB}}$). Quelle est la fréquence de coupure à -3 dB ? Quel type de filtre est-ce ?

3) On assimile à présent ce filtre à un filtre idéal de même type : si $|H(\nu)|_{\mathrm{dB}} > -3$ dB, on considère que $H(\nu) \simeq 1$, sinon $H(\nu) \simeq 0$. Avec cette approximation, quelle est la réponse du filtre au signal $x(t) = \sin(\pi\nu_c t) + \cos(4\pi\nu_c t)$, où ν_c est la fréquence de coupure calculée à la question précédente ?

3 Filtrage de signaux aléatoires : communications à spectre étalé

Soit $x_1(t)$ un signal de communication, aléatoire, de densité spectrale de puissance (DSP) $\gamma_{x1}(\nu)$ nulle en dehors d'une bande de fréquence $[-B; B]$. Cette communication est brouillée par une autre communication portée par un signal $x_2(t)$ de même DSP : $\gamma_{x2}(\nu) = \gamma_{x1}(\nu)$.

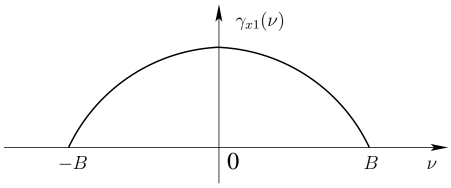

FIG. 2 – Densité spectrale de puissance de $x_1(t)$.

1) Calculer le rapport signal à interférence (RSI), défini comme le rapport entre la puissance P_{x1} du signal utile x_1 et celle P_{x2} du signal perturbateur x_2 : $RSI = P_{x1}/P_{x2}$. Plus le RSI est fort, meilleure est la transmission.

2) On adopte la technique de transmission à spectre étalé, selon le schéma de la figure 3. La première étape consiste à multiplier $x_1(t)$ par un signal pseudo-aléatoire $p(t)$, qui prend les valeurs +1 et -1. Ce signal a un rythme très supérieur à celui de $x_1(t)$ et $x_2(t)$, ce qui se traduit par une largeur spectrale $B' \gg B$. Si l'on multiplie par $p(t)$ un signal $x(t)$ de DSP $\gamma_x(\nu) = \gamma_{x1}(\nu) = \gamma_{x2}(\nu)$ et de puissance P_x, le spectre du signal résultant $x'(t) = x(t)p(t)$ a une DSP $\gamma_{x'}(t)$ à peu près constante de valeur $P_x/2B'$ sur la bande $[-B'; B']$.

a) Le signal reçu est $r(t) = p(t)x_1(t) + x_2(t)$. Ce signal est multiplié par $p(t)$ en réception : on note $y(t) = r(t)p(t)$. Exprimer $y(t)$ en fonction de $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $p(t)$.

b) Si deux signaux $a(t)$ et $b(t)$ sont indépendants, la DSP de leur somme est la somme de leurs DSP : $\gamma_{a+b}(\nu) = \gamma_a(\nu) + \gamma_b(\nu)$. En supposant que $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont indépendants, exprimer la DSP de $y(t)$, $\gamma_y(\nu)$, comme la somme de deux termes, l'un étant $\gamma_{x1}(\nu)$ et l'autre la DSP $\gamma_{x2'}(\nu)$ d'un signal $x'_2(t)$ que l'on précisera. Représenter ces deux termes sur la même figure.

c) On filtre $y(t)$ par un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure B. Soient $z_1(t)$ la réponse du filtre à $x_1(t)$ et $z_2(t)$ la réponse du filtre à $x'_2(t)$. Calculer le nouveau RSI : $RSI' = P_{z1}/P_{z2}$. Conclure.

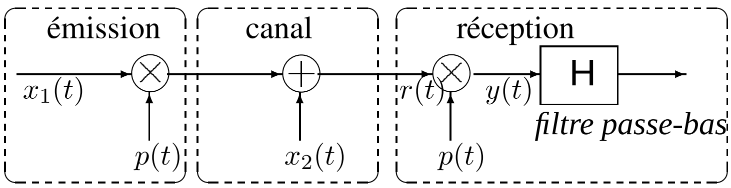

FIG. 3 – Transmission à spectre étalé.