Université Paris 5 / UFR de Mathématiques et Informatique
Master Mathématiques et Informatique pour les Sciences du Vivant / M1 IPCC

Traitement du Signal 1

Examen final (1h30) - 11 janvier 2005

Documents et calculatrices autorisés, téléphones interdits.

Les réponses au QCM doivent être portées directement sur le premier feuillet, qui est à rendre avec votre copie. La plupart des questions de cours devraient pouvoir être traitées assez rapidement, sans perdre de temps à replonger dans le cours. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre qui vous conviendra. Vous trouverez en annexe quelques valeurs numériques utiles pour ces exercices

1 Questions de cours

1.1 QCM (6 points)

NB :

- *Lorsque plusieurs réponses sont possibles, elles doivent être toutes cochées pour que la réponse soit valide.*
- *Le barême est de +1 par réponse juste, 0 par réponse incomplète ou absente et -1/2 par réponse fausse. Il vaut donc mieux ne pas répondre que répondre au hasard.*

1) Plus le spectre d'un signal est étroit, plus la durée du signal est...

☐ **courte** ☐ **longue**

2) Selon le théorème d'échantillonnage de Shannon, échantillonner à la fréquence ν_e un signal de fréquence maximale $\nu_{\max}$ telle que $\nu_{\max} > \nu_e/2$, se traduit toujours par une perte d'information.

☐ **vrai** ☐ **faux**

3) La transformée de Fourier à temps discret est...

☐ **continue** ☐ **discrète** ☐ **périodique**

4) Un filtre numérique est entièrement caractérisé par :

☐ **sa réponse impulsionnelle** ☐ **sa fonction de transfert**
☐ **son gain, ses pôles et ses zéros**

5) Les zéros d'une fonction de transfert en z d'un filtre numérique...

☐ **ne servent à rien** ☐ **servent à atténuer certaines fréquences**
☐ **rendent le filtre instable s'ils sont sur le cercle unité**

6) Lors de la synthèse d'un filtre passe-bas par la méthode du fenêtrage, doubler la taille de la fenêtre permet de doubler l'atténuation en dB de la bande basse.

☐ **vrai** ☐ **faux**

1.2 Questions ouvertes (4 points)

NB : Ces questions appellent des réponses assez courtes.

1) Quel est le rôle d'un filtre anti-repliement de spectre ?

2) En traitement numérique du signal, pourquoi utilise-t-on des fréquences "normalisées" ?

3) Pour un signal discret de durée finie, quelle est l'intérêt de la transformée de Fourier discrète par rapport à la transformée de Fourier à temps discret ?

4) Soient un signal discret $x(n)$ de durée finie M et un filtre de réponse impulsionnelle finie $h(n)$ de longueur M. Soient $X(k)$ et $H(k)$ les transformées de Fourier discrètes (TFD) respectives de $x(n)$ et $h(n)$ sur M points. Pourquoi $X(k)H(k) \neq TFD[x(n) \star h(n)]$? Comment peut-on obtenir l'égalité ?

2 Exercices

2.1 Le jeu des 4 familles (3 points)

Mettre en relation chaque diagramme Zi de pôles-zéros de la figure 3 avec une réponse fréquentielle Fj de la figure 4, **en justifiant vos choix.**

2.2 Analyse d'un filtre RII (5 points)

1) Donner la fonction de tranfert $H(z)$ du filtre représenté sur la figure 1. On pourra pour cela écrire l'équation aux différences liant $w(n)$ à $x(n)$ et celle liant $y(n)$ à $w(n)$, puis décomposer $H(z)$ de la manière suivante :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Y(z)}{W(z)}.\frac{W(z)}{X(z)}$$

2) Calculer les pôles et les zéros de ce filtre. A quelle condition est-il stable ? Dessiner son diagramme pôles-zéros et l'allure de sa réponse fréquentielle en module, dans le cas où $\alpha = 0,9$.

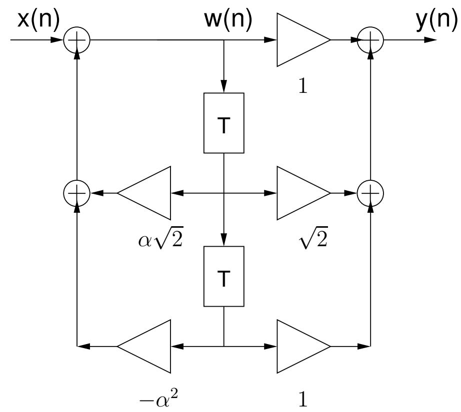

FIG. 1 – Filtre RII, structure canonique

3) Ce filtre est implémenté sur un processeur spécialisé dont l'opération de base, la multiplication-accumulation (MAC), est réalisée en un cycle d'horloge. Quelle est la complexité du filtre en nombre de MAC ? Si le processeur a une fréquence d'horloge de 100 MHz, quelle peut être la fréquence maximale d'échantillonnage du signal traité ?

2.3 Analyse spectrale (3 points)

On souhaite analyser numériquement, par FFT après un échantillonnage à 48 kHz, le spectre d'amplitude des notes jouées par un instrument de musique. Pour chaque note, ce spectre est théoriquement un spectre de raies (harmoniques) espacées d'une fréquence F_0 qui dépend de la note, avec une décroissance d'amplitude de l'ordre de $1/\nu^{2,5}$, comme représenté sur la figure 2. L'écart de niveau, en dB, entre la raie d'ordre n et la raie d'ordre $n+1$ est donc de $50\log(1+1/n)$. Les notes considérées s'étendent de LA_0 ($F_0 = F_{0\_\mathrm{min}} = 55$ Hz) à LA_4 ($F_0 = F_{0\_\mathrm{max}} = 880$ Hz).

Quelle fenêtre d'analyse (type et longueur minimale) faut-il utiliser pour observer le spectre du signal avec une résolution suffisante en amplitude et en fréquence, quelle que soit la note jouée ? Pour déterminer la résolution en amplitude nécessaire, on supposera que l'étalement du spectre de chaque n^{eme} raie induit par le fenêtrage est négligeable au-delà des deux raies adjacentes ($n-1$ et $n+1$).

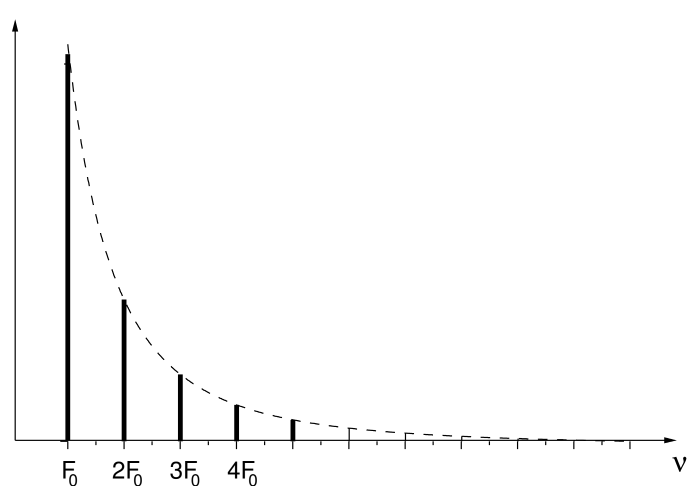

FIG. 2 – Spectre d'une note de fréquence fondamentale F_0

3 Annexes

$\log(2) \simeq 0.3$

angle	0	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
cos	1	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1
sin	0	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0

TAB. 1 – Quelques cosinus et sinus usuels

Type de fenêtre	Atténuation du lobe secondaire relativement au lobe principal	Largeur du lobe principal en fréquence normalisée
Recangulaire	-13 dB	$2/N$
Triangle (Bartlett)	-25 dB	$4/N$
Hanning	-31 dB	$4/N$
Hamming	-41 dB	$4/N$
Blackman	-57 dB	$6/N$

TAB. 2 – Caractéristiques des principales fenêtres

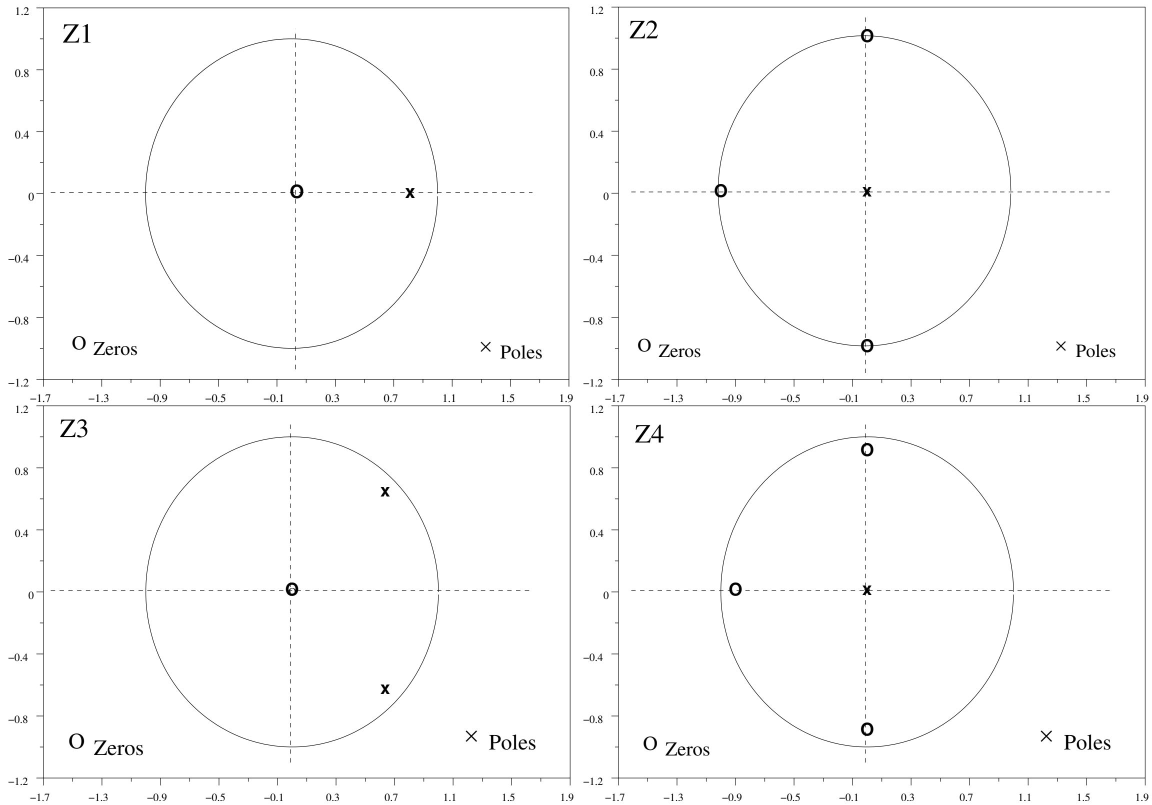

FIG. 3 – Diagrammes pôles-zéros

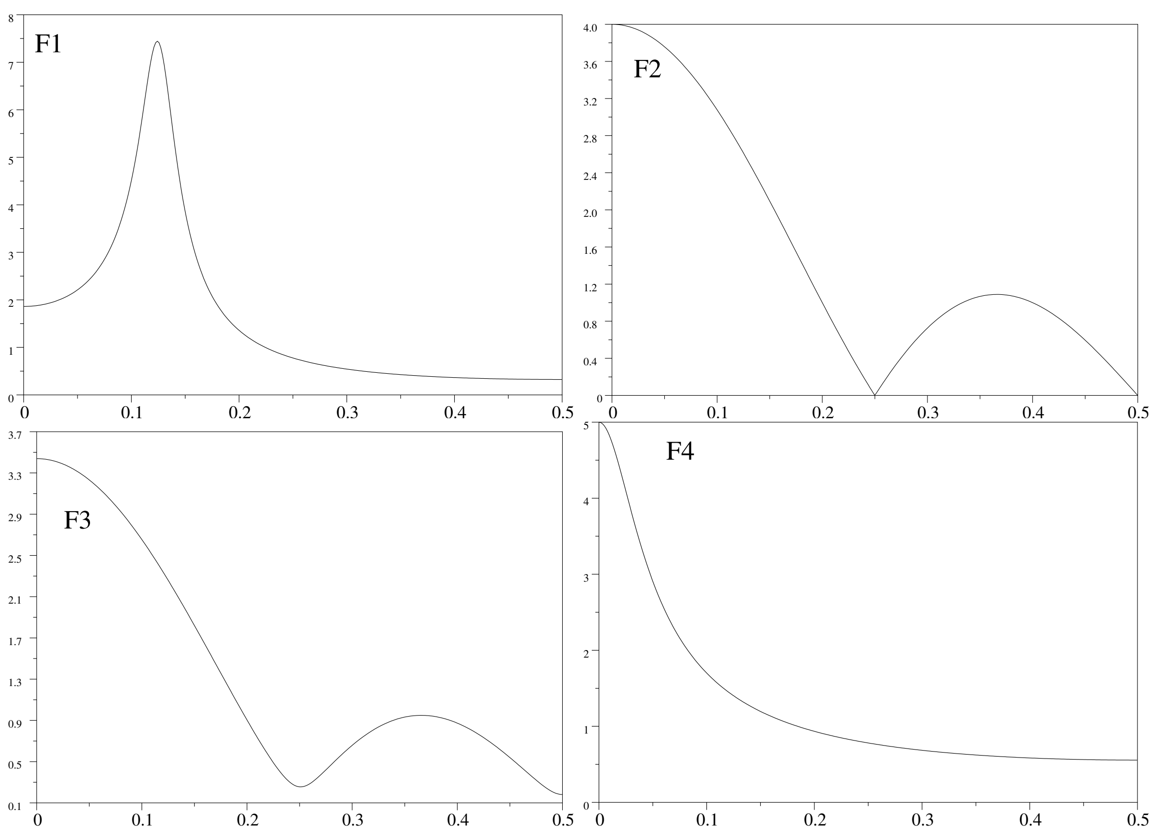

FIG. 4 – Réponses fréquentielles (fréquences normalisées positives)