M1 IPCC : Bases du Traitement du Signal
Examen final - Durée : 1h30

11 janvier 2006

Documents et calculatrices autorisés, téléphones interdits.

Les réponses au QCM doivent être portées directement sur le premier feuillet, qui est à rendre avec votre copie. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre qui vous conviendra, mais ne dispersez pas les réponses d'un même exercice dans la copie.

1 Questions de cours

1.1 Question ouverte (1,5 points)

Expliquez **de manière concise** le principe et l'intérêt du zéro-padding en analyse spectrale numérique.

1.2 QCM (3 points)

Pour chaque question, cochez toutes les affirmations justes. Le barême est de 1 point si votre réponse est entièrement correcte, 0 sinon.

1) Un signal aléatoire continu, stationnaire, de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance (DSP) nulle en dehors de l'intervalle $[-B; B]$ est filtré par un filtre passe-bas de fréquence de coupure $\nu_c > B$.

☐ **Le signal de sortie est aussi stationnaire.**
☐ **On ne peut pas prévoir la moyenne du signal de sortie.**
☐ **Le signal de sortie a la même DSP que le signal d'entrée.**

2) Pour qu'un filtre numérique de réponse impulsionnelle $h(n)$ soit stable, il faut que :

☐ $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |h(n)| < \infty$
☐ **les modules de ses zéros soient strictement inférieurs à 1**
☐ **les parties réelles de ses pôles soient négatives strictement**

3) On réalise l'analyse spectrale par TFD d'un signal composé de deux sinusoïdes. Les fréquences normalisées de ces sinusoïdes sont connues et valent respectivement 1/4 et 3/8. Leurs amplitudes sont inconnues. Pour réaliser cette analyse, on prélève 256 échantillons du signal, que l'on pondère par une fenêtre de Hamming. La résolution fréquentielle vaut donc 4/256, ce qui est largement suffisant. Cependant, on n'observe que le spectre d'une des deux sinusoïdes. Pour avoir plus de chance de visualiser le spectre des deux sinusoïdes, il faut :

☐ **augmenter le nombre d'échantillons**
☐ **remplacer la fenêtre de Hamming par une fenêtre de Blackman**
☐ **remplacer la fenêtre de Hamming par une fenêtre rectangulaire**

2 Exercices

2.1 Filtrage analogique : filtre RLC (5 points)

Le circuit de la figure 1, alimenté par la tension $x(t)$, est un système dynamique d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$, régi par l'équation suivante :

$$LCy''(t) + RCy'(t) + y(t) = x(t)$$

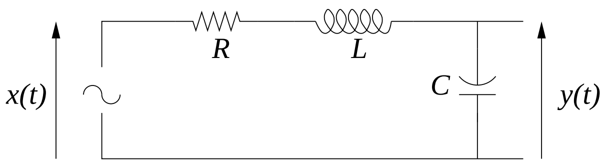

FIG. 1 – Circuit RLC.

1) Donner la réponse fréquentielle $H(\nu)$ de ce filtre.

2) On suppose que $R = \sqrt{2L/C}$. Montrez que :

$$|H(\nu)^2| = \frac{1}{1 + \left(4\pi^2 LC\nu^2\right)^2}$$

Est-ce un filtre passe-bas, passe-haut, passe-bande ou réjecteur de bande ? (justifier)

2.2 Analyse d'un filtre numérique (5 points)

Soit un filtre numérique dont le diagramme pôles-zéros est représenté sur la figure 2.

1) Est-ce un filtre à réponse impulsionnelle finie ou infinie ? (justifier votre réponse)

2) Est-il stable ? (justifiez)

3) Donner l'allure du module de sa réponse fréquentielle.

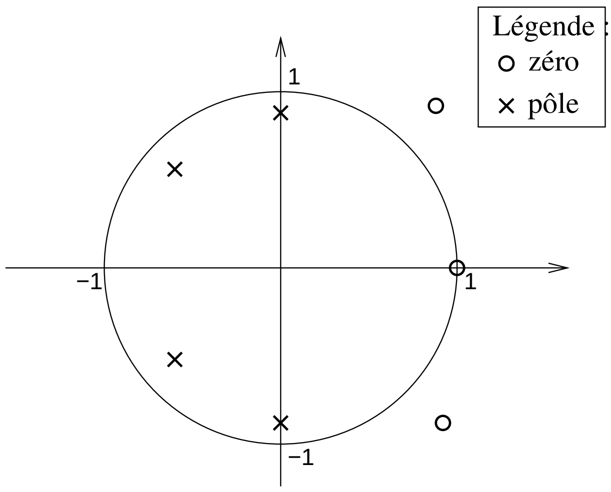

FIG. 2 – Diagramme pôles-zéros.

2.3 Tatouage audio par filtrage passe-tout (6 points)

Le tatouage audio consiste à insérer une information dans un son par une altération imperceptible du signal sonore. On s'intéresse ici au tatouage par filtrage passe-tout.

Un filtre passe-tout est un filtre qui ne modifie que le spectre de phase d'un signal (l'argument du spectre), sans altérer le spectre d'amplitude. Ainsi, le module de la réponse fréquentielle vaut 1 pour toutes les fréquences, d'où le nom de passe-tout. Cette propriété est particulièrement intéressante pour les signaux audio, puisque l'oreille est sensible aux modifications du spectre d'amplitude des signaux sonores mais peu sensible aux faibles variations de la phase.

On dispose de deux filtres passe-tout distincts H_0 et H_1. La méthode de tatouage consiste à découper le signal en blocs de N échantillons et à insérer 1 bit par bloc, en filtrant par H_0 pour insérer 0 ou par H_1 pour insérer 1, selon le schéma de la figure 3.

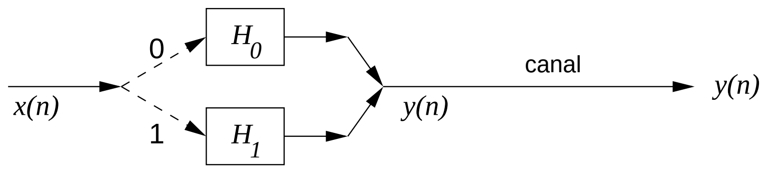

FIG. 3 – Tatouage par filtrage passe-tout.

La fonction de transfert des filtres utilisés est définie par :

$$H_i(z) = \frac{a_i + z^{-1}}{1 + a_i z^{-1}}, \qquad i \in \{0, 1\}$$

avec a_0 et a_1 deux réels distincts compris strictement entre -1 et +1.

1) Donner l'équation aux différences liant l'entrée et la sortie d'un filtre H_i.

2) Montrer que $\forall f,\ |H_i(f)| = 1$.

3) Quels sont le pôle et le zéro de H_i ?

4) Pour un bloc donné de y de longueur N, le destinataire du signal audio y ne connaît ni le signal original x ni le filtre H_i utilisé. Mais il connaît les deux valeurs possibles de a_i et donc le pôle et le zéro de chaque filtre H_i.

Sachant que :

- pour n'importe quelle valeur de $z \in \mathbb{C}$ on peut calculer $Y(z) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n) z^{-n}$
- $Y(z) = H_i(z)X(z)$,

comment peut-on détecter le bit émis ?