M1 info : Bases du Traitement du Signal
Examen final - Durée : 2h

10 janvier 2008

Documents et calculatrices autorisés, téléphones interdits.

Les réponses au QCM doivent être portées directement sur le premier feuillet, qui est à rendre avec votre copie. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre qui vous conviendra, mais ne dispersez pas les réponses d'un même exercice dans la copie.

1 Questions de cours

1.1 Questions ouvertes (5 points)

NB : Ces questions appellent des réponses à la fois courtes, précises et clairement justifiées.

1) Soient deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ apériodiques d'énergie finie. On note $\Gamma_{xy}(\tau)$ la corrélation entre x et y. Si $\Gamma_{xy}(\tau)$ est maximal en $\tau = 1$ s, qu'est-ce que cela signifie physiquement ?

2) L'espérance d'un signal $x(t)$ aléatoire stationnaire se calcule de manière générale par :

$$E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{p}(x)\mathrm{d}x$$

ce qui suppose de disposer d'un modèle probabiliste du signal. Quel est l'intérêt de l'hypothèse d'ergodicité pour le calcul approché de l'espérance et de l'autocorrélation d'un signal stationnaire ?

3) Quel lien existe-t-il entre la transformée en z et la transformée de Fourier à temps discret ?

4) Soit un quantificateur associant à chaque échantillon $x[n]$ d'un signal une valeur $x_Q[n]$ telle que :

$$x_Q[n] = \begin{cases} \text{partie entière de } x[n] & \text{si } |x[n]| < 128 \\ 127 & \text{si } x[n] \geq 128 \\ -128 & \text{si } x[n] \leq -128 \end{cases}$$

Ce système est-il linéaire ? Est-il stationnaire ? Justifiez vos réponses, notamment en donnant un contre-exemple si vous répondez par la négative.

1.2 QCM (4 points)

Pour chaque question, cochez toutes les affirmations justes (il peut ne pas y en avoir). Le barême est de 1 point si votre réponse est entièrement correcte, 0 sinon.

1) Un signal aléatoire continu, stationnaire, de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance (DSP) nulle en dehors de l'intervalle $[-B; B]$ est filtré par un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $\nu_c > B$.

☐ **Le signal de sortie est aussi stationnaire.**
☐ **On ne peut pas prévoir la moyenne du signal de sortie.**
☐ **Le signal de sortie a la même DSP que le signal d'entrée.**
☐ **Le signal de sortie a la même puissance que le signal d'entrée.**

2) Lorsqu'on échantillonne à la fréquence ν_e un signal de fréquence maximale $\nu_{\max}$, le théorème d'échantillonnage de Shannon exige que

☐ $\boldsymbol{\nu_e > 2\nu_{\max}}$ ☐ $\boldsymbol{\nu_e > \nu_{\max}/2}$ ☐ **l'on utilise un filtre anti-repliement**

3) Un filtre à réponse impulsionnelle infinie

☐ **est causal s'il est stable**
☐ **est stable s'il est causal**
☐ **causal est stable ssi ses zéros sont de modules < 1**
☐ **causal est stable ssi ses pôles sont de modules < 1.**

4) Lorsqu'on analyse par transformée de Fourier discrète (TFD) le spectre d'une sinusoïde à partir d'un nombre fini d'échantillons, les raies spectrales subissent un élargissement

☐ **à cause de la limitation de la durée d'observation**
☐ **qui serait moindre si l'on utilisait une transformée de Fourier à temps discret (TFTD) au lieu de la TFD**
☐ **qui dépend du type de fenêtre de pondération**

2 Exercices

2.1 Etude d'un filtre (6 points)

Soit un filtre numérique d'entrée $x(n)$ et de sortie $y(n)$, tel que :

$$y(n) = x(n) - 2x(n-1) + 2\rho\cos\theta y(n-1) - \rho^2 y(n-2)\,, \quad \rho \in \mathbb{R}_+^*$$

1) Dessinez la structure du filtre. Est-ce un filtre à réponse impulsionnelle finie ou infinie ?

2) Calculez la fonction de transfert $H(z)$ du filtre.

3) Quels sont les pôles et les zéros du filtre ? A quelle condition le filtre est-il stable ? Dessinez le diagramme pôles-zéros dans le cas où $\rho = 0.8$ et $\theta = \pi/4$.

4) Esquissez le module de la réponse fréquentielle.

2.2 Sur-échantillonnage (7 points)

Soit un signal discret $x[n]$ issu de l'échantillonnage à la fréquence ν_e d'un signal analogique $x(t)$. On souhaite sur-échantillonner $x[n]$ d'un facteur 2, c'est-à-dire obtenir à partir de $x[n]$ un signal $\tilde{x}[n]$ qui corresponde à l'échantillonnage de $x(t)$ à la fréquence $2\nu_e$.

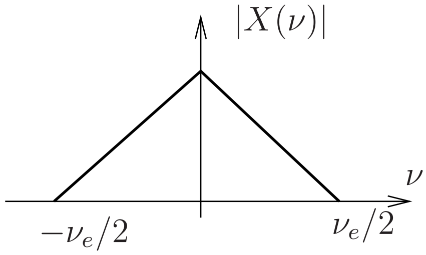

FIG. 1 – Spectre d'amplitude de $x(t)$.

1) La méthode usuelle comporte deux opérations successives, dont la première consiste à intercaler un zéro entre 2 échantillons successifs de $x[n]$ (fig. 2a). On obtient le signal $y[n]$:

$$y[n] = \begin{cases} x[n/2] & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

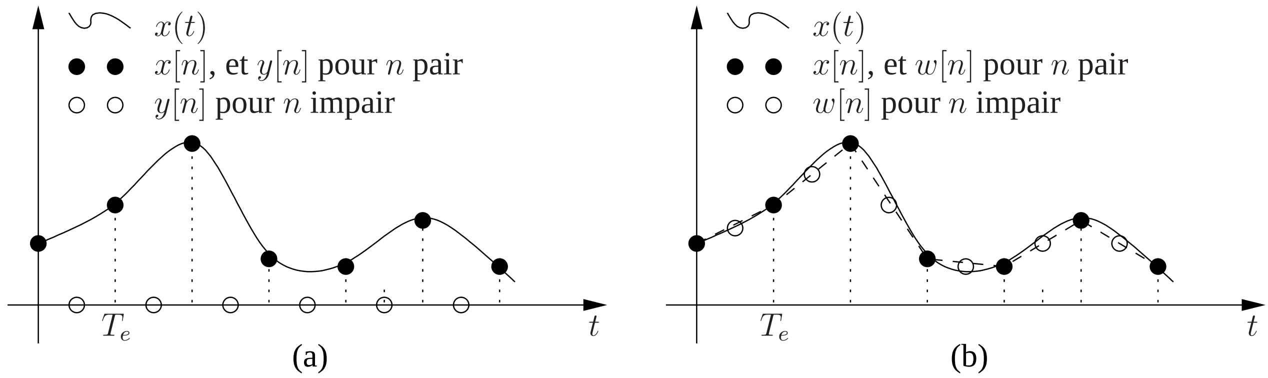

FIG. 2 – Suréchantillonnage.

Montrer que $Y(f) = X(2f)$, f désignant la fréquence normalisée. Dessiner $|X(f)|$ et $|Y(f)|$ sur l'intervalle $[-1/2; 1/2]$. Quel est le deuxième traitement à appliquer à y pour obtenir le $\tilde{x}[n]$ souhaité ? (justifier précisément votre réponse)

2) Une autre méthode, plus intuitive, consiste à intercaler non pas des zéros, mais des valeurs obtenues par interpolation linéaire (fig. 2b) :

$$w[n] = \begin{cases} y[n] & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{y[n-1]+y[n+1]}{2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

– Montrer que cette interpolation est équivalente au filtrage de y par un filtre de réponse impulsionnelle $h(n) = \frac{1}{2}\delta(n+1) + \delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1)$.
– Calculer la fonction de transfert $H(z)$ de ce filtre, puis sa réponse fréquentielle $H(f)$. Tracer $|H(f)|$.
– Comparer cette solution à la précédente : en quoi s'en approche-t-elle ? Laquelle vous semble la meilleure ?