M1 info : Bases du Traitement du Signal
Examen final - Durée : 2h

11 janvier 2010

Documents et calculatrices autorisés, téléphones interdits.

Le sujet est long, mais il n'est pas nécessaire de tout faire pour avoir 20. Il vaut mieux faire peu de choses soigneusement que traiter tout le sujet de manière superficielle. Les différentes parties peuvent être traités dans l'ordre qui vous conviendra, mais ne dispersez pas les réponses d'une même partie dans la copie.

1 Questions de cours (6 points)

NB : Ces questions appellent des réponses à la fois courtes, précises et clairement justifiées. On ne vous demande pas de recopier des extraits du cours, mais de répondre exactement aux questions posées.

a) Un signal aléatoire continu, stationnaire, de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance (DSP) nulle en dehors de l'intervalle $[-B; B]$ est filtré par un filtre passe-bas de fréquence de coupure $\nu_c > B$. Que peut-on dire sur la sortie ? (il y a 2 choses à dire).

b) Quel est le rôle du filtre anti-repliement placé avant un échantillonneur de fréquence d'échantillonnage ν_e ? Quelles doivent être ses caractéristiques : passe-bas / passe-haut / passe-bande / réjecteur de bande, fréquence(s) de coupure ?

c) Pour un signal discret de durée finie, quelle est l'intérêt de la transformée de Fourier discrète par rapport à la transformée de Fourier à temps discret ?

d) La synthèse d'un filtre RIF par la méthode du fenêtrage induit d'une part le phénomène de Gibbs (ondulations de la réponse fréquentielle) et d'autre part une bande de transition entre la bande passante et la bande atténuée. A quelles caractéristiques de la fenêtre utilisée ces deux phénomènes sont-ils respectivement liés ?

2 Exercices

2.1 Echantillonnage (7 points)

Soit un signal analogique $x(t)$ de transformée de Fourier $X(\nu)$ à support borné $[-B, B]$. On dispose de deux versions échantillonnées de $x(t)$, notées respectivement x_1 et x_2. La fréquence d'échantillonnage est la même dans les deux cas, $\nu_e = B$; mais les instants d'échantillonnage sont décalés de 2θ :

$$\begin{aligned} x_1[n] &= x(nT_e - \theta) \\ x_2[n] &= x(nT_e + \theta) \end{aligned}$$

où $T_e = 1/\nu_e$.

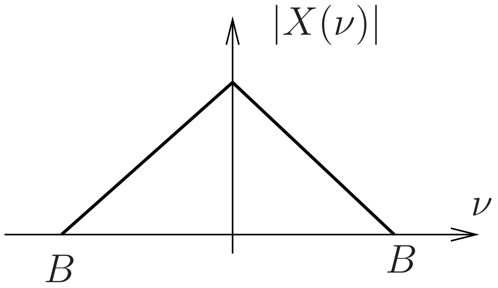

FIG. 1 – Spectre d'amplitude de $x(t)$.

a) Montrer que :

$$X_1(\nu) = \nu_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k\nu_e\theta} X(\nu - k\nu_e)$$

Vous pourrez vous inspirer de la démonstration de la formule de Poisson.

De même, en remplaçant θ par $-\theta$,

$$X_2(\nu) = \nu_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k\nu_e\theta} X(\nu - k\nu_e)$$

b) Représenter sur la même figure les modules des termes de $X_1(\nu)$ pour $k = -2 \rightarrow +2$. La condition du théorème de Shannon est-elle vérifiée ? Comment cela se traduit-il sur la figure ? Peut-on reconstruire $x(t)$ à partir de $x_1[n]$ ou $x_2[n]$ seul ?

c) Pour $\nu \in [0, B]$ puis pour $\nu \in [-B, 0]$, exprimer $X_1(\nu)$ et $X_2(\nu)$ en fonction de $X(\nu)$, $X(\nu - B)$, $X(\nu + B)$, θ et B.

d) A partir des équations précédentes, montrer que l'on peut reconstruire $x(t)$ à partir de $x_1[n]$ et $x_2[n]$.

2.2 Filtrage numérique (7 points)

Soit un filtre numérique de réponse fréquentielle $H(f)$ représentée en module sur la figure 2, défini par l'équation aux différences :

$$y(n) = x(n) + x(n-4)$$

où x et y désignent respectivement l'entrée et la sortie du filtre.

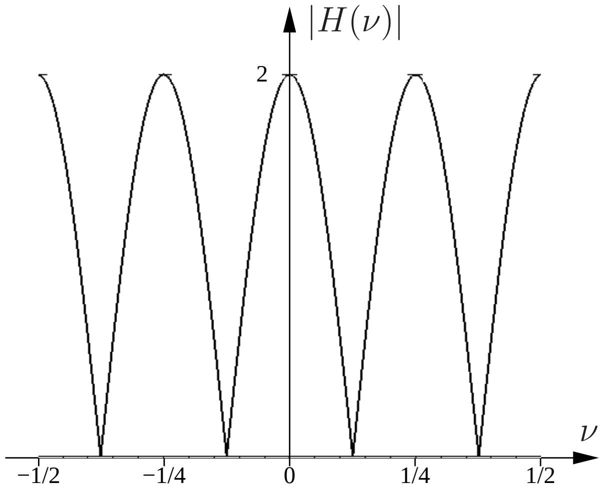

FIG. 2 – Réponse fréquentielle du filtre (en module).

a) Quelle est la longueur de la réponse impulsionnelle ? Combien de multiplications-accumulations le filtre réalise-t-il pour chaque échantillon d'entrée ? Dessinez la structure du filtre.

b) Calculez la fonction de transfert $H(z)$. Quel est le nombre maximal de pôles ? de zéros ? En vous aidant de la figure 2, dessinez le diagramme pôles-zéros. Ce filtre est-il stable ?

c) On filtre un signal harmonique x de fréquence fondamentale normalisée $f_0 = 1/8$: x est une somme de 3 sinusoïdes discrètes de fréquences multiples de f_0, soit

$$x(n) = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} \cos(2\pi k f_0 n)$$

Dessinez le spectre d'amplitude de x et celui de la sortie y. Donnez l'expression temporelle de $y(n)$.

2.3 Analyse spectrale numérique (4 points)

Le son produit par un alto peut être considéré comme harmonique, c'est-à-dire que son spectre est composé de raies à des fréquences multiples d'une fréquence fondamentale f_0, qui correspond à la hauteur de la note jouée. L'amplitude des raies décroît rapidement avec la fréquence et on peut avoir des écarts de l'ordre de 40 dB entre les basses et les hautes fréquences. La fréquence fondamentale $f_0 \in [128 \text{ Hz}; 1280 \text{ Hz}]$.

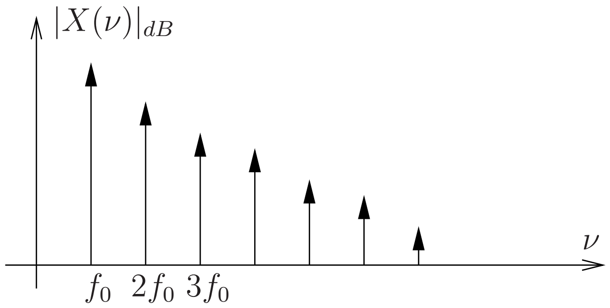

FIG. 3 – Spectre d'amplitude (en dB) typique d'un son d'alto

a) On souhaite faire l'analyse spectrale d'une note par transformée de Fourier discrète (TFD) à partir d'une séquence de N échantillons du signal échantillonné à 32 kHz. Quel type de fenêtre utiliser ? Quelle doit être la valeur minimale de N pour assurer une résolution fréquentielle suffisante dans tous les cas ?

b) Si la TFD est calculée par transformée de Fourier rapide (FFT), sur combien de point doit être calculée la FFT ? Quelle est l'opération à appliquer à la séquence de N échantillons pour calculer ainsi la FFT ?