

M1 info : Bases du Traitement du Signal et des images

Examen final - Durée : 2h

6 janvier 2011

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Le sujet est long, mais il n'est pas nécessaire de tout faire pour avoir 20. Il vaut mieux faire peu de choses soigneusement que traiter tout le sujet de manière superficielle. Les différentes parties peuvent être traitées dans l'ordre qui vous conviendra, mais ne dispersez pas les réponses d'une même partie dans la copie.

1 Questions de cours (4 + 5 points)

NB : Ces questions appellent des réponses à la fois courtes, précises et clairement justifiées. On ne vous demande pas de recopier des extraits du cours, mais de répondre exactement aux questions posées.

a) La figure 1 représente trois signaux temporels continus ou discrets numérotés 1 à 3 (ligne du haut) et trois spectres d'amplitude a, b et c (ligne du bas). Indiquez le spectre correspondant à chaque signal en justifiant vos choix.

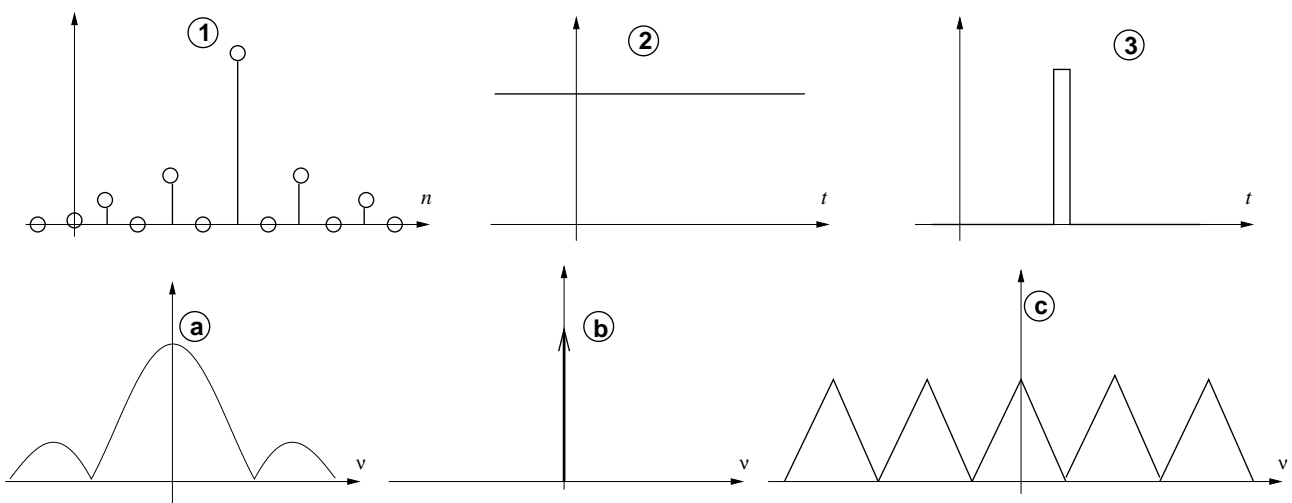


FIG. 1 –

b) Soit un signal composé de deux sinusoïdes de même amplitude et de fréquences f_1 et f_2 proches. L'analyse spectrale numérique est réalisée via un fenêtrage rectangulaire de longueur N puis calcul de la transformée de Fourier discrète (TFD). Les deux raies aux fréquences f_1 et f_2 sont bien visibles. En revanche, si l'on réduit l'amplitude d'une des sinusoïdes, la raie correspondante disparaît. Expliquez pourquoi et comment y remédier.

c) On peut réduire la complexité du filtrage d'un signal numérique x par un filtre de réponse impulsionnelle finie h en multipliant les TFD de x et h et en prenant la TFD inverse du résultat. Quelle précaution faut-il prendre pour que la sortie soit vraiment le résultat du filtrage de x par h ?

d) Quelles sont les trois grandes catégories de transformation d'images ? Décrivez le principe général pour chacune de ces catégories.

e) Donnez un exemple de transformation dans chacune des trois catégories.

2 Exercices

2.1 Image (4 points)

Rappel : Toutes les réponses doivent être clairement rédigées et justifiées.

Sur la figure ci-jointe, en considérant que l'image originale est l'image A, retrouvez pour les images B et C le type de traitement appliqué, l'histogramme cumulatif et le spectre de Fourier associés.

2.2 Echantillonnage (7 points)

La figure 2 représente l'histogramme des tailles d'une population. A chaque intervalle de tailles $[nT_0 - \frac{T_0}{2}; nT_0 + \frac{T_0}{2}]$, on associe une valeur $x(n)$ qui est le nombre de personnes dont la taille est dans cet intervalle. On peut considérer x comme un signal discret.

On décide de grouper par 2 les classes de taille. On construit donc un nouvel histogramme \tilde{x} tel que :

$$\begin{aligned}\tilde{x}(2k) &= x(2k) + x(2k + 1) \\ \tilde{x}(2k + 1) &= 0\end{aligned}$$

Pour l'exemple de la figure 2, on obtient l'histogramme de la figure 3.

Le nouvel histogramme peut également s'exprimer :

$$\tilde{x}(n) = \frac{1 + (-1)^n}{2} (x(n) + x(n + 1))$$

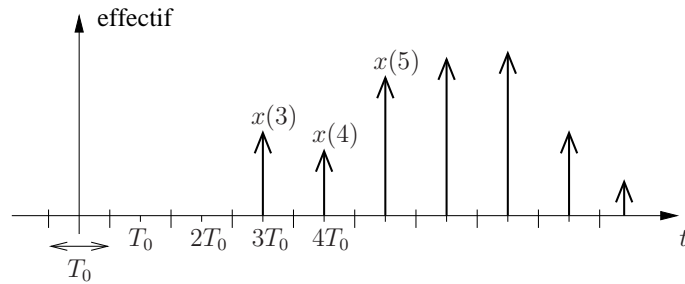


FIG. 2 – Histogramme des tailles d'une population.

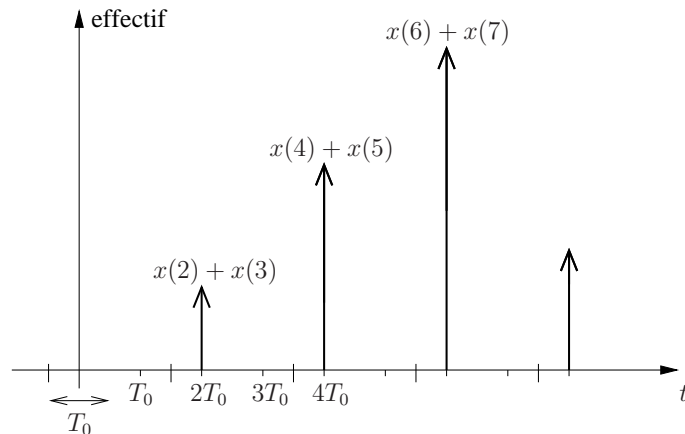


FIG. 3 – Histogramme avec fusion des classes deux par deux.

- a) Montrer que la transformée en Z de \tilde{x} peut s'exprimer :

$$\tilde{X}(z) = \frac{1+z}{2}X(z) + \frac{1-z}{2}X(-z)$$

- b) Soit $Y(z) = X(-z)$. Montrer que la transformée de Fourier à temps discret correspondant vaut :

$$Y(f) = X\left(f + \frac{1}{2}\right)$$

où f désigne la fréquence normalisée. Indication : $-1 = e^{j\pi}$.

- c) En déduire l'expression de $\tilde{X}(f)$ en fonction de $X(f)$.

- d) A quelle condition suffisante sur $X(f)$ peut-on retrouver l'histogramme original x à partir de \tilde{x} ? Vous pouvez vous aider en traçant sur la même figure un exemple de $|X(f)|$ et de $|X(f + \frac{1}{2})|$

- e) Quelle est la réponse fréquentielle du filtre à appliquer à \tilde{x} pour retrouver x ? Tracer le module de cette réponse fréquentielle.

2.3 Filtrage numérique (5 points)

- a) Donner l'équation aux différences et la fonction de transfert $H(z)$ du filtre représenté sur la figure 4. De quel type est sa réponse impulsionnelle ?
- b) Déterminer les pôles et les zéros du filtre. A quelle condition celui-ci est-il stable ?
- c) Représenter le diagramme pôles-zéros de ce filtre dans le cas où $\alpha = 0.9$ et $\beta = 1$. En déduire l'allure de sa réponse fréquentielle.

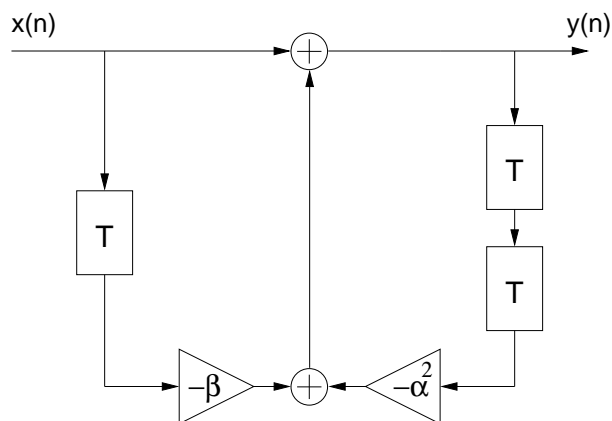


FIG. 4 –