M1 info : Bases du Traitement du Signal et des images
Examen final - Durée : 2h

16 janvier 2012

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Les différentes parties peuvent être traités dans l'ordre qui vous conviendra, mais ne dispersez pas les réponses d'une même partie dans la copie.

1 Questions de cours (4 points signal + 4,5 points image)

NB : Ces questions appellent des réponses à la fois courtes, précises et clairement justifiées. On ne vous demande pas de recopier des extraits du cours, mais de répondre exactement aux questions posées.

a) La figure 1 représente trois signaux temporels numérotés 1 à 3 (ligne du haut) et trois spectres d'amplitude a, b et c (ligne du bas). Associez chaque spectre à un signal temporel, en expliquant vos choix.

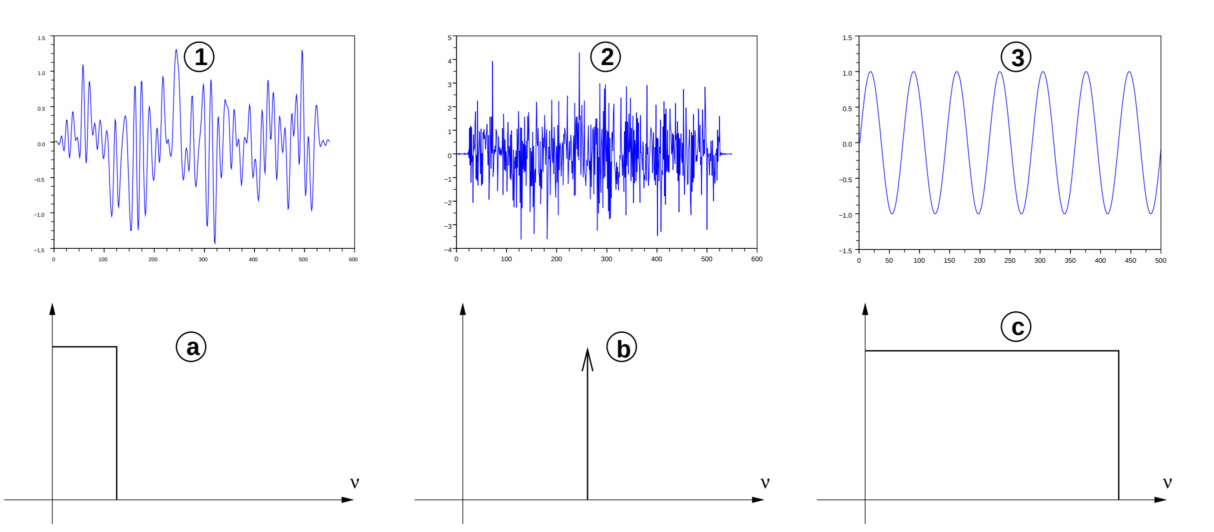

FIG. 1 –

b) Soit un filtre analogique de réponse impulsionnelle $h(t)$. Pourquoi peut-on dire que la réponse du système à l'impulsion de Dirac retardée de θ, $\delta(t-\theta)$, vaut $h(t-\theta)$?

c) Pourquoi le spectre d'amplitude représenté ci-dessous ne peut-il être celui d'un signal de fréquence maximale $\nu_{\max}$ échantillonné à la fréquence ν_e ?

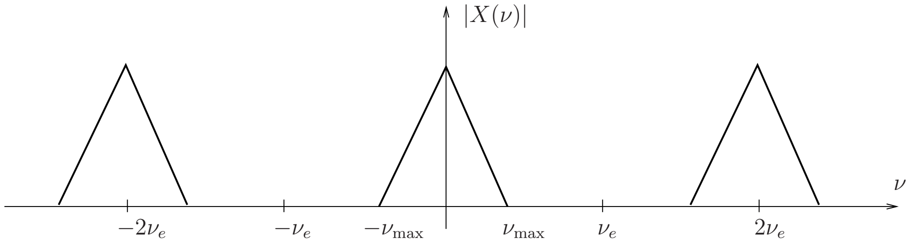

FIG. 2 –

d) On prélève 200 échantillons d'un signal pour en faire une analyse spectrale par transformée de Fourier rapide (FFT). Pourquoi doit-on compléter les 200 échantillons par 56 zéros avant de calculer le spectre par FFT ? Comment appelle-t-on ce procédé ? Quel est un autre intérêt de celui-ci ?

e) Donner le principe du filtrage dans les images. A quelle opération correspond le filtrage linéaire dans le domaine fréquentiel ? dans le domaine spatial ? Donner le principe général de ces opérations dans l'espace discret.

2 Exercices

2.1 Exercice Image (2,5 points)

Rappel : Toutes les réponses doivent être clairement rédigées et justifiées.

Sur la figure suivante, en considérant que l'image originale est l'image A retrouvez le type de traitement appliqué pour passer de A vers B puis de B vers C.

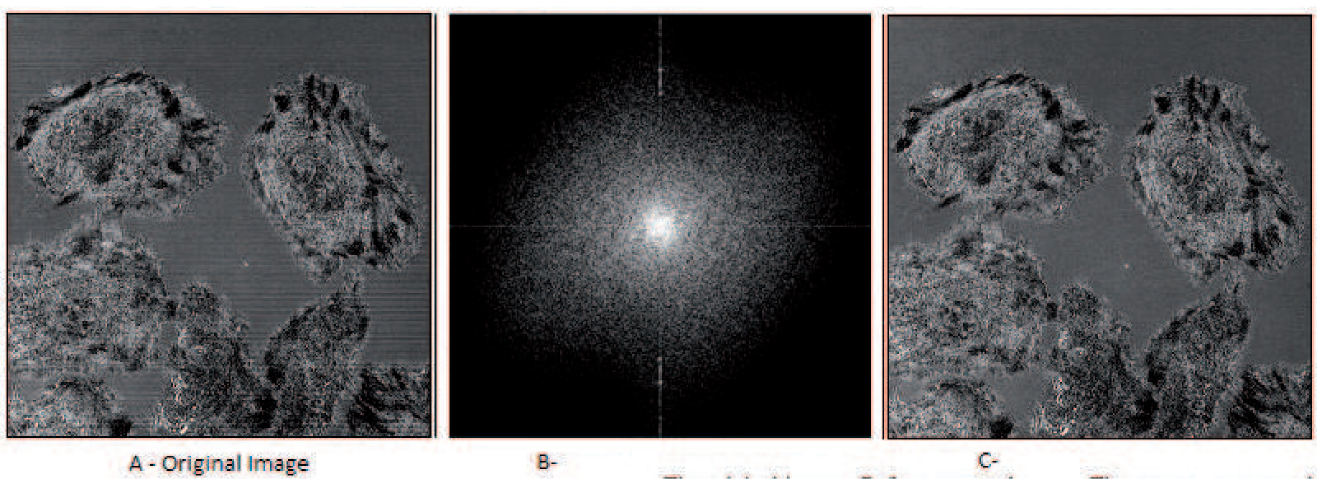

FIG. 3 – Image : quel traitement ?

2.2 Analyse spectrale numérique (6 points)

La figure 4 représente sur l'intervalle de fréquences normalisées $[0; 1/2]$ le spectre d'amplitude d'un signal x échantillonné, constitué de 2 sinuoïdes d'amplitudes respectives 10 et 1, de fréquences normalisées respectives $f_1 = 1/8$ et $f_2 = 1/8 + 1/32$. On prélève N échantillons de ce signal pour en faire une analyse spectrale numérique. La figure 5 représente le spectre du signal tronqué $\tilde{x}$, noté $\tilde{X}(f)$, et sa transformée de Fourier discrète (TFD), notée $\tilde{X}[k]$.

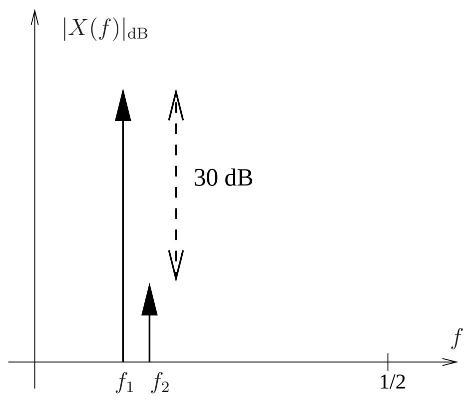

FIG. 4 – Spectre d'amplitude de x.

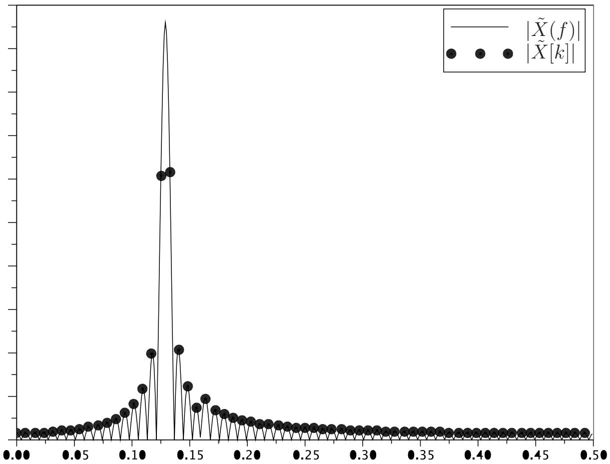

FIG. 5 – TFTD et TFD de $\tilde{x}$.

a) Pour faire apparaître nettement les 2 raies spectrales, on envisage 3 possibilités :
- compléter $\tilde{x}$ par des zéros (zéro-padding) avant le calcul de la TFD ;
- augmenter N ;
- remplacer le fenêtrage rectangulaire par un fenêtrage de Hamming.

Pour chacune des solutions proposées, indiquer si elle est appropriée, en justifiant **précisément** pourquoi.

b) On sous-échantillonne le signal x d'un facteur 2, c'est-à-dire qu'on prélève un échantillon sur 2 pour faire un signal y tel que $y(n) = x(2n)$. Montrer que :

$$Y(f) = \frac{1}{2}\left(X\left(\frac{f}{2}\right) + X\left(\frac{f}{2} - \frac{1}{2}\right)\right)$$

Conseil : partir du membre de gauche de l'égalité.

c) Le spectre de y est représenté sur la figure 6. Pourquoi peut-on diviser par 2 le nombre d'échantillons prélevés pour l'analyse spectrale ?

2.3 Filtrage numérique (5,5 points)

a) Soit un filtre numérique défini par l'équation aux différences :

$$y(n) = x(n) - \mu^2 x(n-2) - \rho^2 y(n-2)$$

Dessiner le schéma de ce filtre et calculer sa fonction de transfert $H(z)$. De quel type est sa réponse impulsionnelle ?

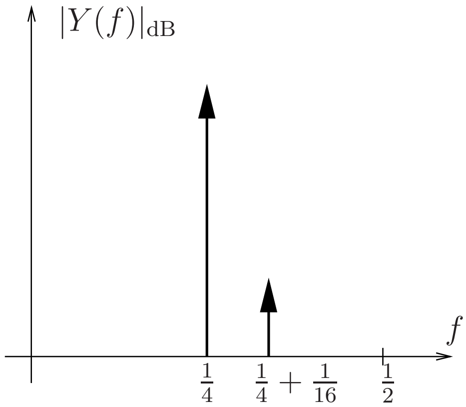

FIG. 6 – Spectre d'amplitude de y.

b) Déterminer les pôles et les zéros du filtre. A quelle condition celui-ci est-il stable ?

c) Représenter le diagramme pôles-zéros de ce filtre dans le cas où $\rho = 0.9$ et $\mu = 1$. En déduire l'allure de sa réponse fréquentielle.

3 Formulaire

Trigonométrie :

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}}{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}}{2\mathrm{j}}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} = \cos\alpha + \mathrm{j}\sin\alpha$$

Transformée de Fourier :

$$\mathrm{TF}[x(t)] = X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu t}\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{TF}^{-1}[X(\nu)] = x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu t}\mathrm{d}\nu$$

$$\mathrm{TF}[x(t) * y(t)] = TF[x(t)].TF[y(t)]$$

$$\mathrm{TF}[s(t-a)] = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu a}S(\nu)$$

$$\mathrm{TF}[s(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu_0 t}] = S(\nu - \nu_0)$$

$$\mathrm{TF}[s^{(n)}(t)] = (\mathrm{j}2\pi\nu)^n S(\nu)$$

$$\delta(t) = \mathrm{TF}^{-1}[1]$$

$$\delta(\nu) = \mathrm{TF}[1]$$

$$\mathrm{TF}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu_0 t}] = \delta(\nu - \nu_0)$$

Durée utile T d'un signal réel $s(t)$:

$$\left(\frac{T}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 s(t)^2 \mathrm{d}t$$

Largeur utile B du spectre du signal :

$$\left(\frac{B}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu^2 |S(\nu)|^2 \mathrm{d}\nu$$

Relation d'incertitude :

$$T.B \geq \frac{1}{\pi}$$

Soit $x(t)$ un signal apériodique d'énergie finie. Autocorrélation de $x(t)$:

$$\Gamma_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)\mathrm{d}t$$

Sa transformée de Fourier : $\mathrm{TF}[\Gamma_x(\tau)] = |X(\nu)|^2$
Théorème de Parseval :

$$E = \Gamma_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 \mathrm{d}\nu$$

Pour $s(t)$ T_0-périodique, avec $T_0 = 1/\nu_0$:

$$s(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n\nu_0 t}, \quad \text{avec} \ : \quad c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n\nu_0 t}\mathrm{d}t$$

Convolution :

$$\begin{aligned} x * y &= y * x \\ x * \delta &= x \\ x(t) * \delta(t-t_0) &= x(t-t_0) \end{aligned}$$

Pour un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$, réponse $y(t)$ à une entrée $x(t)$:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)x(t-\theta)\mathrm{d}\theta$$

Pour $x(t)$ signal déterministe :

$$Y(\nu) = H(\nu)X(\nu)$$

Transformée de Fourier à temps discret :

$$S_e(\nu) = \mathrm{TFTD}(s[n]) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} s[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n T_e \nu}$$

Reconstruction parfaite d'un signal :

$$s(t) = T_e \sum_{n\in\mathbb{Z}} s[n]\mathrm{sinc}(\pi\nu_e t - \pi n)$$

Formule de Poisson :

$$S_e(\nu) = \nu_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} S(\nu - k\nu_e)$$

Réponse fréquentielle :

– Pour un filtre de réponse impulsionnelle $h(n)$, réponse fréquentielle :

$$H(f) = \mathrm{TFTD}[h(n)]$$

– Relation entrée-sortie :

$$y(n) = h(n) * x(n) \Leftrightarrow Y(f) = H(f)X(f)$$

Transformée en Z d'un signal discret $x(n)$:

$$X(z) = \mathrm{TZ}[x(n)] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)z^{-n}$$

Théorème du retard :

$$\mathrm{TZ}[x(n-k)] = z^{-k}\mathrm{TZ}[x(n)]$$

La TZ transforme le produit de convolution en produit simple :

$$\mathrm{TZ}[x(n) * y(n)] = X(z)Y(z)$$

$\mathrm{TFTD}[x(n)] = \mathrm{TZ}[x(n)]$ calculée en $z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f}$
Soit un signal discret $x(n)$ de durée finie N :

$$x(n) = 0 \quad \forall\, n < 0 \text{ ou } n \geq N$$

– Transformée de Fourier à temps discret (TFTD) de x :

$$X(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nf}$$

– Transformée de Fourier discrète (TFD) :

$$\mathrm{TFD}[x(n)] = X[k] = X(f = \frac{k}{N}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi kn}{N}} \quad \forall\, 0 \leq k \leq N-1$$

TFD inverse :

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi kn}{N}} = \mathrm{TFD}^{-1}[X[k]] \quad \forall\, 0 \leq n \leq N-1$$

Types de fenêtres et largeur du lobe principal en fréquence normalisée :

Fenêtre	*Largeur du lobe principal (fréq. normalisée)*	*Ecart d'amplitude lobes principal/secondaire (dB)*
Rectangle	$2/N$	13
Triangle	$4/N$	25
Hanning	$4/N$	31
Hamming	$4/N$	41
Blackman	$6/N$	57