- FICHE n° 1 Tests paramétriques à un échantillon

Exercice 1
On reprend l'exercice du chapitre 1 du cours. On a obtenu les mesures de niveau de salmonelles suivantes, exprimées en NPP (Nombre le Plus Probable) par gramme :

0,175 0,205 0,760 0,719 0,199 0,529 0,306 0,520 0,010

On suppose que la quantité de salmonelle dans un pot de glace suit une loi gaussienne et que sa variance est connue et est égale à 0,08. On note μ l'espérance de la quantité de salmonelle dans un pot de glace et on souhaite effectuer le test :

$$(H_0)\ :\ \mu = 0{,}3 \text{ contre } (H_1)\ :\ \mu = 0{,}4$$

1. Faire le test aux niveaux 5%, 10% et 20% et comparer les résultats.
2. Pour le niveau de test à 5%, quel est le nombre d'observations nécessaires pour avoir une puissance de 80% ? Et pour avoir une puissance de 90% ? Comparer les résultats.

Exercice 2
En 2011, le don moyen au téléthon était de 38 euros dans une ville E. Afin d'inciter les citoyens de la ville E à faire un don supérieur en 2012, des bénévoles ont organisé des campagnes d'information sur divers maladies génétiques et l'action d'associations combattant ces maladies comme l'AFM. Sur un échantillon de 14 personnes ayant participé au téléthon en 2012 dans la ville E, on a relevé les montants de don en euros suivants :

32 25 45 50 68 60 35 43 45 72 25 54 30 27

On supposera que le montant d'un don au téléthon en 2012 dans la ville E est une variable aléatoire de loi normale d'espérance μ inconnue et de variance $\sigma^2 = 246{,}49$.

1. La campagne d'action pour le téléthon 2012 des bénévoles de la ville E est-elle significativement efficace ? (on effectuera le test au niveau $\alpha = 2\%$)
2. Calculer la puissance du test précédent lorsque μ (le montant moyen du don) est égal à 45 euros. Même question lorsque $\mu = 55$ euros.
3. La puissance du test est-elle inférieure pour $\mu = 45$ euros ou pour $\mu = 65$ euros ? Justifier **sans aucun calcul supplémentaire.**

Exercice 3
Un négociant en jus de fruits s'intéresse à la contenance des bouteilles d'un jus déterminé. Il se demande si la contenance moyenne n'est pas inférieure à la contenance légale de 75 cl. A cet effet, il mesure le contenu de 10 bouteilles prises au hasard et obtient les valeurs suivantes :

73,2 cl 72,6 cl 74,5 cl 75 cl 75,5 cl 73,7 cl 74,1 cl 75,8 cl 74,8 cl 75 cl

On suppose que la contenance est une variable aléatoire de loi normale d'espérance μ et de variance σ^2 inconnues.

1. Donner un intervalle de confiance de la moyenne de la contenance des bouteilles à 99%.
2. Peut-on conclure que le contenu moyen est inférieur à 75 cl, avec un test de niveau 1% ? (*On supposera que le producteur est honnête et que le négociant doit prouver la fraude qu'il soupçonne.*) Comparer ce résultat avec celui de la question précédente.
3. Calculée à l'aide d'un logiciel statistique on trouve que la p-valeur de ce test est égale à 0,0525. Expliquer comment cette p-valeur a été calculée. Ce résultat vous semble-t-il surprenant avec le résultat de la question précédente ? Commenter.

Exercice 4
Un fabricant de rillettes d'oie affirme que ses boîtes de 190 grammes (poids net) contiennent au moins 70% de viande d'oie en moyenne. On notera μ_0 cette valeur moyenne minimale garantie. Une organisation de consommateurs désire prouver que le fabricant ne dit pas la vérité. On suppose que la teneur en viande d'oie est distribuée selon une loi normale d'écart-type $\sigma = 10$ grammes. On décide de prélever un échantillon de n boîtes pour vérifier l'affirmation du fabricant.

1. Quelles sont les hypothèses (H_0) et (H_1) ?
2. Construire la règle de décision pour un test de niveau 5% et une taille d'échantillon n quelconque.
3. L'organisation de consommateurs souhaite être capable de détecter avec une probabilité d'au moins 99% que l'affirmation du fabricant est fausse si les boîtes ne contiennent en moyenne que 67% de viande d'oie ou moins, le risque de premier espèce consenti étant de $\alpha = 5\%$. Quelle doit être la taille d'échantillon n ?

Exercice 5
Une entreprise reçoit un lot de pièces d'un fournisseur. L'accord entre l'entreprise et son fournisseur stipule que si la proportion des pièces ne satisfaisant pas aux normes convenues est $p = 0,05$ l'entreprise acceptera le lot de pièces. Si cette proportion est $p = 0,10$ le fournisseur doit reprendre sa livraison. Pour déterminer la décision à prendre, on procède à l'examen d'un échantillon de n pièces.

1. On choisit tout d'abord $(H_0) : p = 0{,}10$ et $(H_1) : p = 0{,}05$.
   (a) Quel est la signification de ce choix ?
   (b) Quelle est la forme de la région critique du test correspondant à un risque de première espèce $\alpha = 10\%$, pour $n = 100$?
   (c) Si l'on observe 7 mauvaises pièces dans cet échantillon quelle décision doit on prendre ?
2. On choisit à présent $(H_0) : p = 0{,}05$ et $(H_1) : p = 0{,}10$.
   (a) A quoi correspond alors l'erreur de première espèce ?
   (b) On fixe le risque de première espèce à $\alpha = 10\%$. Quelle est la forme de la région critique correspondante, pour $n = 100$?
   (c) Si l'on observe 7 mauvaises pièces dans cet échantillon quelle décision doit on prendre ?
3. Comparer les deux décisions.
4. Pour quelles valeurs de n les décisions seront-elles compatibles ?

Exercice 6
Un homme politique a remporté les dernières élections avec 52% de voix. Un sondage effectué un an après son élection auprès de 1 000 personnes indiquent que 508 d'entre elles voteront pour lui si de nouvelles élections ont lieu.

1. Donner un intervalle de confiance à 95% de la proportion de votants pour cet homme politique dans la population.
2. Si de nouvelles élections avaient lieu, son score serait-il différent ? Répondre à la question en réalisant un test statistique.

Exercice 7
En 2011, 45% des clients d'une agence de voyage sont parties pendant les vacances de Noël aux Antilles. Des professionnels du tourisme pensent qu'en 2012 cette destination attirera moins de touristes qu'auparavant. L'agence décide alors d'effectuer un sondage auprès de ses clients : sur $n = 500$ personnes interrogées, 201 ont l'intention de choisir la destination des Antilles à Noël.
L'agence peut-elle en conclure que la destination des Antilles à Noël sera significativement moins prisée en 2012 qu'en 2011 ?

Exercice 8
Un laboratoire pharmaceutique fabrique un médicament dont la teneur, en un certain composant par unité de fabrication, est assurée avec un écart-type de 8 milligrammes. Le service de recherche a mis au point un nouveau procédé de fabrication qui sera adopté s'il assure une réduction substantielle de la dispersion. On a fait 10 mesures de teneur sur des unités fabriquées par la nouvelle méthode et obtenus les résultats suivants, exprimés en milligrammes :

$$725 \quad 722 \quad 727 \quad 718 \quad 723 \quad 731 \quad 719 \quad 724 \quad 726 \quad 725$$

On suppose que chaque mesure est une réalisation d'une variable aléatoire normale. Peut-on adopter la nouvelle méthode ?