Université Paris Descartes **Projet tutoré - M1 Maths et Modélisation**
2$^{\text{e}}$ semestre 2015-2016

Sujet

Sur le comportement en temps long de quelques processus avec renforcement

Encadrant :
Eric Luçon, eric.lucon@parisdescartes.fr, *Bureau 814-D*

Une observation usuellement faite par les myrmécologues (les spécialistes des fourmis) est que, pour se rendre de la fourmilière à une source de nourriture, les fourmis suivent toutes le même chemin, les unes derrière les autres. Ceci s'explique par le fait qu'une fourmi dépose sur son chemin des phéromones susceptibles d'attirer ses congénères. Ainsi, une fourmi sera d'autant plus attirée par un chemin donné que celui-ci aura été emprunté par beaucoup de ses congénères. On assiste ici à ce qu'on appelle une propriété d'*auto-renforcement* : plus un chemin sera emprunté, plus celui-ci sera utilisé par les fourmis suivantes, et donc encore plus susceptible d'attirer d'autres fourmis, etc.

Ce phénomène est présent dans de nombreuses autres situations : en économie (plus on est riche, plus on a tendance à devenir riche), en théorie des graphes (plus on a de contacts sur les réseaux sociaux, plus on en gagne), en biologie (si entre deux allèles d'un même gène, l'un favorise plus que l'autre la reproduction d'une espèce, il va plus facilement se propager dans la population), en épidémiologie (plus un virus se propage, plus le nombre de personnes contaminées est grand et plus rapide est la propagation), etc.

Urnes de Polya

Les processus avec renforcement (*reinforced processes* en anglais) forment une classe de processus stochastiques décrivant ces phénomènes. Le modèle historique a été proposé par Polya (1923) et consiste en une urne initialement remplie de a boules blanches et b boules noires. A l'instant n, étant données B_n boules blanches et N_n boules noires, on tire une boule dans l'urne, on la remet dans l'urne, puis on ajoute une boule supplémentaire de la même couleur. La situation la plus simple historiquement considérée est celle d'un tirage uniforme, c'est-à-dire quand conditionnellement au fait que $B_n = i$ et $N_n = j$, la probabilité de tirer une boule blanche est

$$\pi_{i,j} = \frac{i}{i+j}.$$

La première question de ce projet sera dans ce cas de comprendre le comportement en temps long de la proportion Z_n de boules blanches dans l'urne quand $n \to \infty$: y a-t-il cohabitation en tout temps des deux couleurs ou finit-on par tirer finalement toujours la même couleur ? Quelle est l'influence de la condition initiale (a, b) sur ce résultat ?

On montrera en particulier [4] que la limite $\lim_{n\to\infty} Z_n = Z_\infty$ (en un sens à préciser) existe et on explicitera la loi de Z_∞. La preuve de ce résultat repose sur des arguments de convergence de martingales. Une étape sera de prouver un résultat de probabilités important : le Théorème de de Finetti [1] sur les suites de variables échangeables.

Une seconde étape du projet sera de considérer des généralisations du modèle d'urne où la probabilité de transition est donnée par

$$\pi_{i,j} = \frac{w_i}{w_i + w_j},$$

pour des poids (w_i) déterminés [3, 5]. Un cas particulier important est le modèle exponentiel où $w_i = \rho^i$, pour $i \geqslant 0$. Le but principal de cette partie est de montrer le résultat suivant : si A est l'événement de fixation "on finit par ne tirer qu'une seule couleur", alors

$$\mathbb{P}(A) = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{w_i} < +\infty. \tag{1}$$

Enfin, selon le temps qu'il restera, il s'agira de comprendre des travaux récents [2] à propos d'urnes de Polya en interaction, qui exhibent des comportements de synchronization non triviaux.

Objectifs du projet

— Etudier le modèle de Polya historique et ses généralisations.

— Prouver la convergence de Z_n dans le cas linéaire.

— Prouver l'équivalence (1).

— Etudier différents modèles d'urnes en interaction pour différents choix de poids (w_i).

— Simuler les différents processus avec le logiciel de votre choix.

— Rédiger un rapport en Latex sur votre travail.

Prérequis

Avoir suivi le cours de "Probabilités Avancées" (et dans une moindre importance "Analyse de Fourier") au premier semestre.

Références

[1] P. Billingsley. *Probability and measure.* Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, third edition, 1995.

[2] P. Dai Pra, P.-Y. Louis, and I. G. Minelli. Synchronization via interacting reinforcement. *J. Appl. Probab.*, 51(2) :556–568, 06 2014.

[3] B. Davis. Reinforced random walk. *Probability Theory and Related Fields*, 84(2) :203–229, 1990.

[4] A. Klenke. *Probability theory.* Universitext. Springer, London, german edition, 2014. A comprehensive course.

[5] M. Launay. Interacting urn models. *http ://arxiv.org/abs/1101.1410*, 01 2011.